ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

24η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

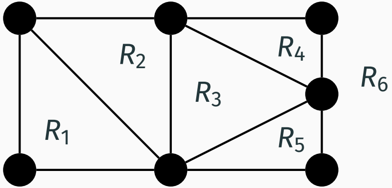
Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 18/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επίπεδα γραφήματα

Περιοχές

Έστω μια γραφική αναπαράσταση ενός απλού γραφήματος, που καθιστά το γράφημα επίπεδο. Τότε ορίζεται μια διαμέριση του επιπέδου σε επιμέρους περιοχές (συμπεριλαμβανόμενης και μιας χωρίς εξωτερικά σύνορα).



Ως βαθμός μιας περιοχής ορίζεται το πλήθος των ακμών που την ορίζουν. Ένα ερώτημα είναι κατά πόσο το πλήθος των περιοχών που ορίζει ένα επίπεδο γράφημα εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένης γραφικής απεικόνισης.

Θεώρημα (Τύπος του Euler)

Έστω G ένα συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα, με $n \geq 2$ κορυφές και e ακμές. Τότε κάθε γραφική του αναπαράσταση έχει $r = e - n + 2$ περιοχές.

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία υπογραφημάτων $G_1, \ldots, G_e$ του G ως εξής:

- Επιλέγουμε αυθαίρετα μια ακμή του G και παίρνουμε την ακμή αυτή (μαζί με τις κορυφές της) έτσι ορίζουμε το G_1.
- Για κάθε $2 \leq i \leq e$ θα πάρουμε μια ακμή του G που γειτονεύει με μια ακμή του G_{i-1} και θα την προσθέσουμε στο G_{i-1}. Αν το άλλο άκρο της ακμής αυτής δεν ήταν ήδη στο G_{i-1}, το προσθέτουμε και αυτό. Ονομάζουμε το γράφημα που θα πάρουμε G_i.
- Είναι ξεκάθαρο ότι στο τέλος θα πάρουμε $G_e = G$.

Ο τύπος του Euler

Τώρα θα δείξουμε με επαγωγή στο i την ισχύ της πρότασης.

- Η πρόταση είναι αληθής για $i = 1$.
- Έστω ότι ισχύει για i, δηλαδή το G_i ορίζει $r_i = i - n_i + 2$ περιοχές (ΕΥ).
- Διακρίνουμε περιπτώσεις:
    - Αν η ακμή που προσθέτουμε στο επόμενο βήμα ενώνει δύο κορυφές που υπάρχουν ήδη στο G_i, τότε είναι ξεκάθαρο ότι $r_{i+1} = r_i + 1$ και $n_{i+1} = n_i$, άρα (από την ΕΥ) ισχύει η πρότασή μας.
    - Αν η ακμή που προσθέτουμε στο επόμενο βήμα δεν ενώνει δύο κορυφές που υπάρχουν ήδη στο G_i, τότε είναι ξεκάθαρο ότι $r_{i+1} = r_i$ και $n_{i+1} = n_i + 1$, άρα (από την ΕΥ) ισχύει η πρότασή μας.

Σχόλια πάνω στον τύπο του Euler

- Το πλήθος των περιοχών που ορίζει ένα επίπεδο γράφημα είναι ανεξάρτητο της επιλογή μιας συγκεκριμένης γραφικής απεικόνισης.
- Αν για παράδειγμα έχουμε ένα συνεκτικό απλό επίπεδο 3-κανονικό γράφημα 20 κορυφών, τότε αυτό θα έχει 30 ακμές και άρα θα χωρίζει το επίπεδο σε $r = 30 - 20 + 2 = 12$ περιοχές.
- Ο τύπος του Euler μας δίνει άμεσα ότι σε ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα ισχύει ότι

$$e \geq n - 1,$$

  το οποίο είναι ένα τετριμμένο κάτω φράγμα για το e.
- Όπως θα δούμε παρακάτω μπορούμε να βρούμε και ένα μη τετριμμένο άνω φράγμα για το e.

Ένα χρήσιμο πόρισμα

Πόρισμα

Εάν το G είναι ένα απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και e ακμές, τότε $e \leq 3n - 6$.

Έστω $R_1, \ldots, R_r$ οι περιοχές που ορίζει το G. Καταρχάς είναι προφανές ότι ο βαθμός κάθε περιοχής, ακόμα και της εξωτερικής, εφόσον $n \geq 3$, είναι ≥ 3. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{r} \deg R_i = 2e.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $3r \leq 2e \Rightarrow r \leq (2/3)e$. Από τον τύπο του Euler, παίρνουμε ότι $r = e - n + 2$ και το ζητούμενο έπεται συνδυάζοντας τα παραπάνω.

Πορίσματα του πορίσματος

Πόρισμα

Εάν το $G = (V, E)$ είναι ένα απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα, τότε υπάρχει κορυφή βαθμού ≤ 5.

Η πρόταση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο αν το γράφημα έχει λιγότερες από 6 κορυφές. Έστω ότι το γράφημα έχει τουλάχιστον 6 κορυφές και όλες είναι βαθμού ≥ 6. Από το θεώρημα των χειραψιών, παίρνουμε ότι

$$\sum_{u \in V} \deg u = 2|E| \Rightarrow 6|V| \leq 2|E| \Rightarrow |E| \geq 3|V|.$$

Από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε όμως ότι $|E| \leq 3|V| - 6$, άτοπο!

Το πλήρες γράφημα K_5

Πόρισμα

Το γράφημα K_5 δεν είναι επίπεδο.

Το K_5 έχει 5 κορυφές και 10 ακμές, άρα δεν ικανοποιείται η ανισότητα $|E| \leq 3|V| - 6$.

Ένα ακόμα χρήσιμο πόρισμα

Πόρισμα

Εάν το G είναι ένα απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και e ακμές, τέτοιο ώστε να μην εμφανίζονται κύκλοι μήκους 3 τότε $e \leq 2n - 4$.

Το ζητούμενο είναι προφανές για $n = 3$, οπότε υποθέτουμε ότι $n \geq 4$. Έστω $R_1, \ldots, R_r$ οι περιοχές που ορίζει το G. Καταρχάς είναι προφανές ότι ο βαθμός κάθε περιοχής, ακόμα και της εξωτερικής, είναι ≥ 4 και

$$\sum_{i=1}^{r} \deg R_i = 2e.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $4r \leq 2e \Rightarrow r \leq e/2$ και εφόσον, από τον τύπο του Euler, $r = e - n + 2$, το ζητούμενο έπεται.

Το πλήρες διμερές $K_{3,3}$

Πόρισμα

Το γράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Εφόσον το $K_{3,3}$ είναι διμερές δεν έχει κύκλο μήκους 3. Ακόμα, το $K_{3,3}$ έχει 6 κορυφές και 9 ακμές. Το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο πόρισμα.

Ένας πλήρης χαρακτηρισμός

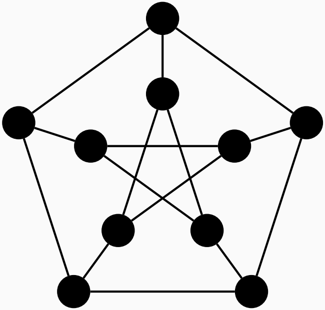
Θεώρημα (Κριτήριο του Kuratowski)

Ένα απλό γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν έχει κάποιο υπογράφημα ομομορφικό με το K_5 ή με το $K_{3,3}$.

- Αποδείχθηκε από τον Kazimierz Kuratowski το 1930 και θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας γραφημάτων.
- Ο χαρακτηρισμός ενός γραφήματος κατά πόσο είναι επίπεδο ή όχι είναι σημαντικό, εκτός από την θεωρία, και στην πράξη, π.χ. στον σχεδιασμό πλακετών τυπωμένων κυκλωμάτων.

Παραδείγματα

- Τα γραφήματα K_n, $n \geq 5$ δεν είναι επίπεδα.
- Τα γραφήματα $K_{m,n}$, με $m, n \geq 3$ δεν είναι επίπεδα.
- Το γράφημα του Petersen δεν είναι επίπεδο



Δείτε το βίντεο για την απόδειξη – δεν είναι η προφανής!