MEM241 - Διακριτα Μαθηματικα

22η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 11/12/2020

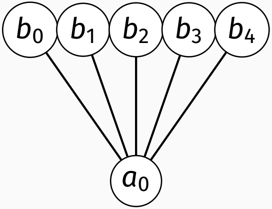
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Το θεώρημα König-Egerváry

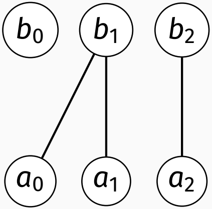
Καλύμματα

Ορισμός

Ένα σύνολο κορυφών U ενός γραφήματος G λέγεται κάλυμμα αν κάθε ακμή του G έχει τουλάχιστον μια κορυφή στο U.



$\{a_0\}$ κάλυμμα



$\{b_1, b_2\}$ και $\{a_0, a_1, b_2\}$ καλύμματα.

Το θεώρημα König-Egernáry

Λήμμα

Αν $\mathcal{M}$ ταίριασμα και U κάλυμμα ενός γραφήματος G, τότε $|U| \geq |\mathcal{M}|$.

Εύκολα βλέπουμε ότι το U θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια εκ των κορυφών της κάθε ακμής του $\mathcal{M}$. Το ζητούμενο έπεται.

Θεώρημα (König-Egernáry)

Αν G διμερές γράφημα, το μέγεθος ενός μέγιστου ταιριάσματος ισούται με το μέγεθος ενός ελάχιστου καλύμματος

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{M}$ μέγιστο ταίριασμα του $G = (V, E)$. Από το προηγούμενο λήμμα, αρκεί να βρούμε κάλυμμα U με $|U| = |\mathcal{M}|$.

Για κάθε $\{u, v\} \in \mathcal{M}$ με $u \in A$ και $v \in B$ (όπου A, B μια κατάλληλη διαμέριση του V) κάνουμε το εξής:

- Αν υπάρχει εναλλακτικό μονοπάτι που καταλήγει στην v, προσθέτω την v στο U.
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι, προσθέτω την u στο U.

Εύκολα βλέπουμε ότι τελικά $|U| = |\mathcal{M}|$, άρα αρκεί νδό $|U|$ κάλυμμα.

Έστω $\{a, b\} \in E$. Αν $\{a, b\} \in \mathcal{M}$, τότε προφανώς $a \in U$ ή $b \in U$. Αν $\{a, b\} \notin \mathcal{M}$, τότε αρκεί νδό $a \in U$ ή $b \in U$.

Απόδειξη

Καταρχάς, επειδή $\mathcal{M}$ μέγιστο έχουμε ότι $\exists\{a', b'\} \in \mathcal{M}$, με $a' = a$ ή $b' = b$, καθώς διαφορετικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την $\{a', b'\}$ στο $\mathcal{M}$ και να παραμείνει ταίριασμα. Έτσι έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $b' = b$, τότε η a είναι αταίριαστη και η ακμή $\{a, b\}$ αποτελεί από μόνη της ένα εναλλακτικό μονοπάτι, άρα θα έχουμε ότι $b \in U$.
2. Αν $a' = a$, τότε, αν $a' \in U$ έχουμε τελειώσει, επομένως αρκεί να επικεντρωθούμε στην περίπτωση $a' \notin U$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $b' \in U$ και άρα θα υπάρχει εναλλακτικό μονοπάτι π_1 που καταλήγει στο b'.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι αν b αταίριαστη, τότε το μονοπάτι

$$\pi_2 \ : \ \underbrace{\cdots \to b'}_{\pi_1} \to a \to b$$

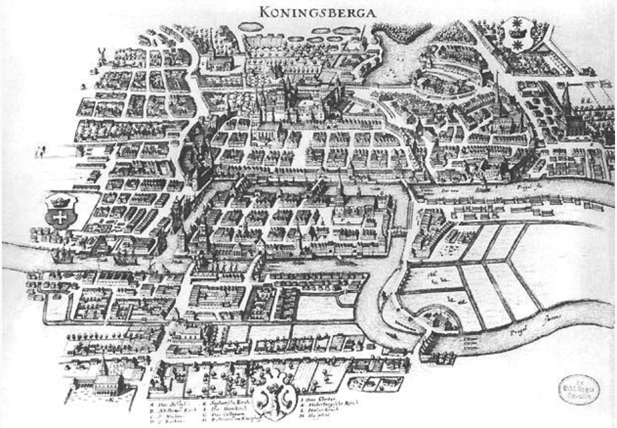
είναι επαυξάνον μονοπάτι του $\mathcal{M}$, άτοπο. Επομένως b κορυφή του ταιριάσματος. Ακόμα έχουμε ότι $b \in B$ και παρατηρούμε ότι το π_2 είναι ένα εναλλακτικό μονοπάτι του $\mathcal{M}$ που καταλήγει στο b. Άρα $b \in U$.

Παρατήρηση

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πιστοποίηση της μεγιστότητας ενός ταιριάσματος, αν δηλαδή μαζί με το ταίριασμα παρουσιαστεί και ένα κάλυμμα ίδιου μεγέθους.

Μονοπατια και κυκλοι Euler και Hamilton

Ένας ιστορικός χάρτης



Königsberg, 1651

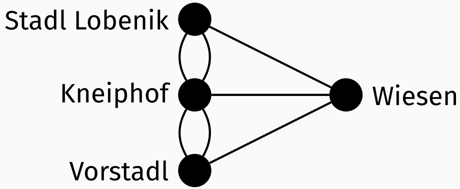
Ερώτημα: Μπορούμε με κάποιο τρόπο να περάσουμε από κάθε μια από τις επτά γέφυρες του Königsberg ακριβώς μια φορά;

Ορισμοί

- Μονοπάτι Euler (αντ. κύκλος Euler) ενός γραφήματος G είναι ένα μονοπάτι (αντ. κύκλος) που διέρχεται από κάθε *ακμή* του G ακριβώς μια φορά.
- Μονοπάτι Hamilton (αντ. κύκλος Hamilton) ενός γραφήματος G είναι ένα μονοπάτι (αντ. κύκλος) που διέρχεται από κάθε *κορυφή* του G ακριβώς μια φορά.

Επαναδιατύπωση του προβλήματος

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, το ερώτημα της προηγούμενης διαφάνειας αναδιατυπώνεται με γλώσσα θεωρίας γραφημάτων ως εξής:



Ερώτημα: Έχει το παραπάνω γράφημα μονοπάτι Euler;

Ο χαρακτηρισμός

Θεώρημα (Euler)

Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$

1. *έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό,*
2. *έχει μονοπάτι Euler αν και μόνο αν είτε όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό, είτε ακριβώς δύο κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.*

- Εύκολα βλέπουμε ότι από το παραπάνω η απάντηση στο περιβόητο ερώτημα των επτά γεφυρών του Königsberg είναι αρνητική.
- Στο παραπάνω επιτρέπουμε στο γράφημα να έχει πολλαπλές ακμές και βρόγχους, αλλά το θεωρούμε μη κατευθυνόμενο.

Απόδειξη

Ξεκινάμε σχετικά με τον κύκλο Euler και την ευθεία κατεύθυνση: Έστω

$$\pi \;:\; u \to \cdots \to u$$

ένας κύκλος Euler. Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε ακμή του γραφήματος εμφανίζεται στο π ακριβώς μια φορά. Έτσι κάθε φορά που εμφανίζεται μια κορυφή στο π, ο βαθμός της αυξάνεται κατά 2, με μοναδική εξαίρεση την u στην πρώτη και την τελευταία της εμφάνιση ο βαθμός της θα αυξηθεί κατά 1 κάθε φορά.

Προχωράμε στο αντίστροφο σχετικά με τον κύκλο Euler. Θα εργαστούμε με επαγωγή στο $k = |E|$.

Απόδειξη

Για $k = 0$ η πρόταση είναι τετριμμένη. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $0 \leq n \leq k$ (ΕΥ).

Έστω ότι $|E| = k + 1$ επειδή όλες οι ακμές του G έχουν άρτιο βαθμό, το G δεν είναι δέντρο (καθώς τα δέντρα έχουν φύλλα). Επομένως το G περιέχει έναν κύκλο, έστω C. Αφαιρούμε από το G τις ακμές του C και παίρνουμε το γράφημα G', του οποίου παρατηρούμε ότι οι κορυφές εξακολουθούν να έχουν άρτιο βαθμό.

Ακόμα, παρατηρούμε ότι G' όχι απαραίτητα συνεκτικό. Όμως, εύκολα βλέπουμε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του G', έστω $G_1, \ldots, G_r$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της ΕΥ.

Απόδειξη

Επομένως για κάθε i υπάρχει κύκλος Euler C_i της συνιστώσας G_i. Ακόμα, για κάθε i, ο C_i θα έχει κάποια κοινή κορυφή με τον κύκλο C, την οποία ονομάζουμε u_i. Κατασκευάζουμε έναν κύκλο του G ως εξής:

Διανύουμε τον κύκλο C και μόλις περνάμε από την κορυφή u_i παρεμβάλλουμε τον κύκλο C_i (με αρχή και τέλος την u_i). Εύκολα βλέπουμε ότι ο κύκλος αυτός περνάει από όλες τις ακμές του G ακριβώς μια φορά, δηλαδή είναι κύκλος Euler.

Η απόδειξη σχετικά με του κύκλους Euler είναι πλέον πλήρης.

Απόδειξη

Όσον αφορά το μονοπάτι, η ευθεία κατεύθυνση είναι όμοια, μόνο που η αρχική και η τελικά κορυφή ενδέχεται να διαφέρουν, επομένως ακριβώς αυτές οι δύο κορυφές (αν διαφέρουν) θα έχουν περιττό βαθμό.

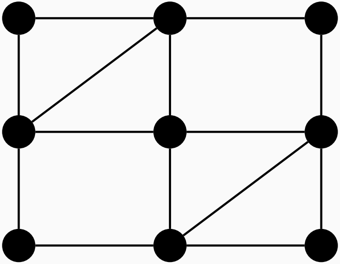
Για το αντίστροφο, αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, τότε θα υπάρχει κάποιος κύκλος Euler, ο οποίος όμως θα είναι και μονοπάτι Euler. Αν έχουμε ακριβώς δύο κορυφές (έστω u, v) περιττού βαθμού, τότε προσθέτουμε την ακμή $\{u, v\}$ στο γράφημα (ή αυξάνουμε την πολλαπλότητά της κατά 1 αν ήδη υπάρχει) και το ζητούμενο προκύπτει και πάλι από την περίπτωση του κύκλου Euler.

Μερικά σχόλια

- Η παραπάνω απόδειξη είναι κατασκευαστική. Έτσι μας βοηθάει όχι μόνο να αποφανθούμε κατά πόσο υπάρχει ή όχι ένας κύκλος ή ένα μονοπάτι Euler, αλλά αν υπάρχει κάτι από αυτά, να το κατασκευάσουμε.
- Από την απόδειξη επίσης προκύπτει ότι αν όλες οι κορυφές ενός συνεκτικού γραφήματος έχουν άρτιο βαθμό, τότε τα μονοπάτια Euler που έχει το γράφημα, θα είναι υποχρεωτικά ταυτόχρονα και κύκλοι.
- Ομοίως, αν έχουμε ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού, τότε όλα τα μονοπάτια Euler θα έχουν υποχρεωτικά για αρχή και τέλος αυτές τις κορυφές.

Ένα παράδειγμα

Υπάρχει κύκλος ή μονοπάτι Euler για το παρακάτω γράφημα;
Αν ναι, μπορείτε να βρείτε ένα;



Δείτε το βίντεο για την απάντηση!