# MEM241 - Διακριτα Μαθηματικα

## 18η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 27/11/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

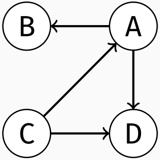
# Μη απλά γραφήματα

# Κατευθυνόμενα γραφήματα

**Ορισμός**

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα σύνολο της μορφής $G = (V, E)$, όπου $V$ είναι οι κορυφές και $E \subseteq V \times V$ οι ακμές.

- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα παίζει ρόλο η διάταξη των κορυφών στην ακμή. Η ακμή $(u, v)$ ξεκινάει από την $u$ και καταλήγει στην $v$.
- Αυτό σημαίνει ότι ένα κατευθυνόμενο γράφημα αναπαρίσταται ως εξής:




- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα αλλάζει η έννοια του μονοπατιού, καθώς η κατεύθυνσή του θα πρέπει να συμφωνεί με τις κατευθύνσεις των ακμών.

# Οι βαθμοί στα κατευθυνόμενα γραφήματα

Σε ένα κατεθυνόμενο γράφημα μπορούμε να ορίσουμε τρία είδη βαθμών για την κορυφή $u \in V$:

- Αρνητικός βαθμός: $\deg^- u = \#$ ακμών που καταλήγουν στην $u$.
- Θετικός βαθμός: $\deg^+ u = \#$ ακμών που ξεκινούν από την $u$.
- Βαθμός: $\deg u = \deg^- u + \deg^+ u$.

# Ένα παράδειγμα

**Παράδειγμα**

*Σε μια χώρα υπάρχουν $N$ πόλεις και ανάμεσά τους $N$ δρόμοι, όλοι μονόδρομοι. Έστω $z$ ο αριθμός των πόλεων στις οποίες δεν καταλήγει κανένας δρόμος και $e$ ο αριθμός των πόλεων που καταλήγουν άρτιο το πλήθος δρόμοι (μαζί με το 0). Δείξτε ότι $2z \geq e$.*

Κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με κορυφές τις πόλεις της χώρας και με (κατευθυνόμενες) ακμές τους δρόμους. Παρατηρήστε ότι επειδή όλοι οι δρόμοι είναι μονόδρομοι, αν αγνοήσουμε την κατεύθυνση, τότε πρόκειται για ένα απλό γράφημα.

## Ένα παράδειγμα

Για $k = 0, 1, \ldots, N-1$, θέτουμε $A_k = \{u \in V \mid \deg^- u = k\}$. Προφανώς τα $A_k$ διαμερίζουν το $V$, επομένως

$$|A_0| + |A_1| + \cdots + |A_{N-1}| = N \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} |A_k| = N.$$

Από το θεώρημα των χειραψιών παίρνουμε:

$$\sum_{u \in V} \deg u = 2|E| \Rightarrow \sum_{u \in V} \deg u = 2N \Rightarrow \sum_{u \in V} \deg^- u = N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{u \in A_k} \deg^- u = N \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} k|A_k| = N.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνω

$$\sum_{k=0}^{N-1}(k-1)|A_k| = 0 \Rightarrow |A_0| = \sum_{k=2}^{N-1}(k-1)|A_k| \geq \sum_{k=2}^{N-1}|A_k| \geq \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ άρτιος}}} |A_k|.$$

# Ένα παράδειγμα

Από το τελευταίο παίρνουμε ότι

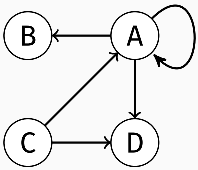
$$2|A_0| \geq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ άρτιος}}} |A_k|.$$

που μας δίνει $2z \geq e$.

# Βρόγχοι

## Ορισμός

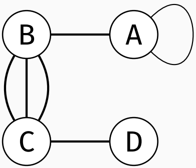
Γραφήματα (κατευθυνόμενη ή μη) με βρόγχους ή αυτοσυνδέσεις είναι γραφήματα στα οποία επιτρέπουμε την ύπαρξη ακμών (τις οποίες ονομάζουμε βρόγχους) με αρχή και τέλος την ίδια κορυφή.



# Πολλαπλές ακμές

**Ορισμός**

Γραφήματα με πολλαπλές ακμές είναι αυτά, στα οποία μια ακμή μπορεί να υπάρχει καμία, μια ή πολλές φορές. Το πλήθος των εμφανίσεων μιας ακμής είναι η πολλαπλότητά της.



# Βάρη

**Ορισμός**

Γράφημα με βάρη είναι εκείνο στο οποίο κάθε ακμή έχει ένα βάρος, το οποίο συμβολίζουμε με $wt(e)$ ή $w(e)$ το βάρος της ακμής $e$.

- Τα βάρη συνήθως συμβολίζουν κόστος, απόσταση, χρόνο κτλ.
- Συνήθως τα βάρη είναι αριθμοί $\geq 0$, αλλά αυτό δεν είναι υποχρεωτικό.
- Ένα γράφημα μπορεί να συνδυάζει πολλές από τις παραπάνω ιδιότητες, π.χ. να έχουμε ένα *μη κατευθυνόμενο γράφημα με βρόγχους και μη αρνητικά βάρη και πολλαπλότητες.*

# Τα μονοπάτια σε γραφήματα με βάρη

### Ορισμός

Το μήκος ενός μονοπατιού σε ένα γράφημα με βάρη είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών του μονοπατιού. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο κορυφές σε ένα γράφημα με βάρη ορίζεται ως το ελάχιστο μήκος μονοπατιού που συνδέει τις κορυφές αυτές (και $+\infty$ αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι) και η διάμετρος του γραφήματος είναι η μέγιστη απόσταση.

### Παρατήρηση

Για να είναι η απόσταση $d$ μετρική σε ένα γράφημα με βάρη, τότε θα πρέπει όλα τα βάρη να είναι $> 0$ και το γράφημα να είναι μη κατευθυνόμενο.

Αποδείξτε το παραπάνω (άσκηση).

# Ένα διάσημο πρόβλημα

**Το πρόβλημα του περιπλανώμενου πωλητή**

Έστω ένα σύνολο πόλεων, όπου όλες οι πόλεις επικοινωνούν μεταξύ τους και κάθε διαδρομή έχει ένα κόστος/απόσταση. Βρες την βέλτιστη διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει ένας περιπλανώμενος πωλητής, ο οποίος θα πρέπει να ξεκινήσει από την πόλη $A$, να περάσει από όλες τις άλλες πόλεις ακριβώς μια φορά και να επιστρέψει στην πόλη $A$.

- Προφανώς εδώ παίρνουμε το πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη, όπου κορυφές είναι οι πόλεις και το βάρος κάθε ακμής το κόστος και ψάχνουμε το ελάχιστο μήκος ενός κύκλου που περνάει από όλες τις κορυφές.
- Είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης.
- Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες (άρα NP-δύσκολο).

# Το ελάχιστο παράγων δέντρο

**Ορισμός**

Έστω $G = (V, E)$ γράφημα με βάρη. Ως βάρος του $G$ ορίζουμε τον αριθμό $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$.

**Ορισμός**

Αν $T$ παραγων δέντρο του (συνεκτικού) γραφήματος $G$, τέτοιο ώστε $w(T) = \min\{w(A) \mid A$ παράγων δέντρο του $G\}$, τότε το $T$ λέγεται ελάχιστο παράγων δέντρο του $G$.

- Το ελάχιστο παράγων δέντρο δύναται να μην είναι μοναδικό.
- Στην περίπτωση που τα βάρη του $G$ είναι $\geq 0$, έχουμε αλγόριθμους που μας επιστρέφουν ένα ελάχιστο παράγων δέντρο του $G$.

# Ο αλγοριθμος του Kruskal

# Γενικά και ιστορικά στοιχεία

- Ο αλγόριθμος του Kruskal δημιουργήθηκε το 1956 από τον Joseph Kruskal.
- Δέχεται ως είσοδο ένα συνεκτικό γράφημα με μη-αρνητικά βάρη $G$ και επιστρέφει ένα ελάχιστο παράγων δέντρο $T$ του $G$.
- Έχει πολυπλοκότητα $O(m \log m)$, όπου $m$ το πλήθος των ακμών του $G$.

# Περιγραφή του αλγόριθμου

Είσοδος: $G = (V, E)$ συνεκτικό γράφημα με βάρη.
Έξοδος: $F = (V, E')$ ελάχιστο παράγων δέντρο του $G$.

1. Δημιουργούμε το δάσος $F = (V, \emptyset)$.
2. Δημιουργούμε ένα σύνολο $S$ που περιέχει όλες τις ακμές του $G$ σε αύξουσα σειρά βαρών.
3. Όσο $S \neq \emptyset$, κάνουμε το εξής:
   3.1 Αφαιρούμε την πρώτη ακμή από το $S$.
   3.2 Αν η ακμή ενώνει διαφορετικά δέντρα του $F$, την προσθέτουμε στο $F$, διαφορετικά όχι.
4. Επιστρέφουμε το $F$.

# Ορθότητα του αλγόριθμου

**Θεώρημα**

*Το γράφημα που επιστρέφει ο αλγόριθμος του Kruskal είναι ελάχιστο παράγων δέντρο του $G$.*

Είναι ξεκάθαρο ότι καθόλη την διάρκεια του αλγορίθμου το $F$ είναι δάσος και ότι στο τέλος θα είναι δέντρο, άρα (αφού έχει τις ίδιες κορυφές) θα είναι παράγων δέντρο. Άρα επικεντρωνόμαστε στην ελαχιστότητά του.

Έστω $T$ το ελάχιστο δέντρο που παράγει το $G$, που συμφωνεί με το $F$ στο μέγιστο πλήθος των βημάτων. Προφανώς, αρκεί να δείξουμε ότι $T = F$.

Έστω ότι $F \neq T$ και $e$ η πρώτη ακμή που προστίθεται στο $F$ που δεν είναι ακμή του $T$. Επειδή $e \notin T$, αν προσθέσω στην $T$ την $e$ δημιουργείται κάποιος κύκλος, τον οποίο ονομάζουμε $C$.

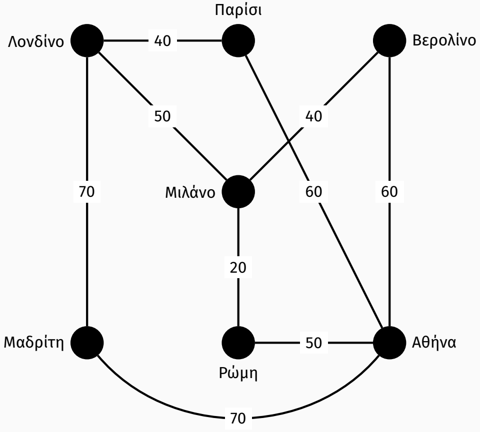
# Ορθότητα του αλγόριθμου

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $f \in C \setminus \{e\}$ με $w(f) \geq w(e)$. Πράγματι, αν όχι τότε όλες οι ακμές του $C$ έχουν γνήσια μικρότερο βάρος από την $e$ και θα είχαν εξεταστεί από τον αλγόριθμο πριν την $e$, οπότε θα είχαν προστεθεί στο $F$, αφού $F$ και $T$ συμφωνούν μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Έστω τώρα το δέντρο $T' = T \cup \{e\} \setminus \{f\}$. Επειδή $T'$ δέντρο που παράγει το $G$, εύκολα παίρνουμε ότι $w(T) \leq w(T') \Rightarrow w(f) \leq w(e) \overset{w(f) \geq w(e)}{\Rightarrow} w(f) = w(e)$. Καταλήγουμε ότι $w(T) = w(T')$ και άρα $T'$ ελάχιστο παράγων δέντρο του $G$ και συμφωνεί σε τουλάχιστον ένα ακόμα βήμα με το $F$, άτοπο!

# Ένα παράδειγμα

Ας εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Kruskal στο παρακάτω παράδειγμα:




Δείτε το βίντεο για την λύση!