MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

17η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

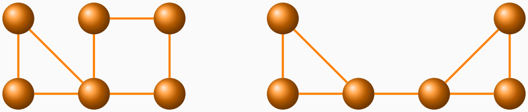
Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 26/11/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Αρθρωσεισ και Γεφυρεσ

Ορισμοί

- Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Μια κορυφή του G λέγεται άρθρωση αν η αφαίρεσή της (μαζί με τις ακμές της) από το γράφημα θα αυξήσει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος.
- Μια ακμή με την ίδια ιδιότητα λέγεται γέφυρα.



Μερικά εύκολα παραδείγματα

Παράδειγμα

Έστω $G = (V, E)$ απλό γράφημα και $u \in V$ κορυφή προσκείμενη σε γέφυρα. Δείξτε ότι u άρθρωση αν και μόνο αν $\deg u \neq 1$.

Παράδειγμα

Έστω $G = (V, E)$ απλό συνεκτικό γράφημα. Τότε $u \in V$ άρθρωση αν και μόνο αν υπάρχουν $u_1, u_2 \in V \setminus \{u\}$ τέτοιες ώστε κάθε μονοπάτι από την u_1 στην u_2 να περνάει από την u.

Δείτε το βίντεο για τις απαντήσεις

Μια πρόταση

Πρόταση

Μια ακμή ενός συνεκτικού γραφήματος είναι γέφυρα αν και μόνο αν δεν είναι ακμή ενός κύκλου εντός του γραφήματος.

Έστω $G = (V, E)$ απλό συνεκτικό γράφημα και $\{u_1, u_2\} \in E$. Θέτουμε $E' = E \setminus \{\{u_1, u_2\}\}$ και $G' = (V, E')$. Η ακμή $\{u_1, u_2\}$ είναι γέφυρα του G αν και μόνο αν το G' δεν είναι συνεκτικό. Είναι εύκολο να δούμε ότι το G' είναι συνεκτικό αν και μόνο αν τα u_1, u_2 ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G'. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μονοπατιού

$$u_1 \to v_1 \to \cdots v_k \to u_2,$$

ελάχιστου μήκους ≥ 2.

Μια πρόταση

Παρατηρήστε ότι παίρνοντας το μονοπάτι να είναι ελάχιστου μήκους σημαίνει ότι δεν μπορεί να επαναλαμβάνεται καμία από τις ακμές του μονοπατιού και επειδή έχουμε μονοπάτι του G', δεν εμφανίζεται η ακμή $\{u_1, u_2\}$. Η ύπαρξη όμως ενός τέτοιου μονοπατιού είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη του κύκλου

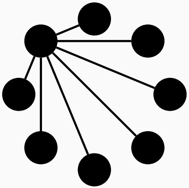
$$u_1 \to v_1 \to \cdots v_k \to u_2 \to u_1$$

στο G.

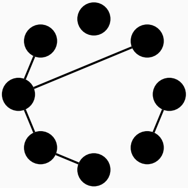
Δεντρα και Δαση

Ορισμοί

- Ένα συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δέντρο.
- Ένα γράφημα (συνεκτικό ή μη) που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δάσος.



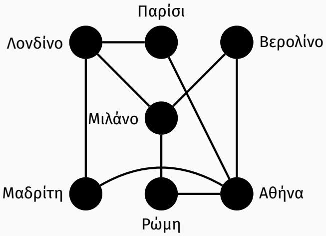
Δέντρο

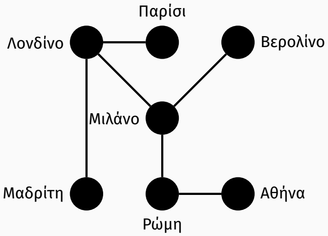


Δάσος

Παράγων δέντρο και δάσος

- Ένα δέντρο T λέγεται παράγων δέντρο ή δέντρο επικάλυψης του γραφήματος G αν τα G και T έχουν τις ίδιες κορυφές και το T είναι υπογράφημα του G.
- Ένα δάσος F λέγεται παράγων δάσος ή δάσος επικάλυψης του γραφήματος G αν σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του G αντιστοιχεί κάποια συνεκτική συνιστώσα του F, η οποία είναι το παράγων δέντρο της.





Παράγων δέντρο και δάσος

Θεώρημα

Κάθε συνεκτικό γράφημα περιέχει ένα παράγων δέντρο.

Έστω G συνεκτικό γράφημα. Αν το G δεν περιέχει κανέναν κύκλο, τότε είναι δέντρο και παράγει τον εαυτό του. Αν περιέχει κύκλο, τότε οι ακμές του κύκλου δεν είναι γέφυρες, επομένως διαγράφοντας μια ακμή, το γράφημα παραμένει συνεκτικό, αλλά ο κύκλος παύει να υπάρχει.

Επειδή ένα γράφημα μπορεί να περιέχει πεπερασμένο αριθμό κύκλων, μετά από πεπερασμένο αριθμό διαγραφών ακμών θα έχουμε καταλήξει σε δέντρο, το οποίο μάλιστα θα παράγει το G.

Πόρισμα

Κάθε γράφημα περιέχει ένα παράγων δάσος.

Φύλλα

Ορισμός

Μια κορυφή ενός δέντρου βαθμού 1 ονομάζεται φύλλο.

Πρόταση

Ένα δέντρο με $n \geq 2$ κορυφές έχει τουλάχιστον ένα φύλλο.

Έστω $T = (V, E)$ δέντρο με $|V| = n$. Καταρχάς παρατηρούμε ότι T συνεκτικό, άρα όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό > 0. Παίρνουμε τώρα μια κορυφή $u_1 \in V$.

- Αν $\deg u_1 = 1$, τότε τελειώσαμε. Αν όχι, τότε παίρνουμε έναν γείτονα της u_1, έστω $u_2 \in V$.
- Αν $\deg u_2 = 1$, τότε τελειώσαμε. Αν όχι, τότε παίρνουμε έναν γείτονα της u_2, διαφορετικό της u_1, έστω $u_3 \in V$. Μάλιστα η u_3 δεν ενώνεται με ακμή με την u_1, γιατί τότε θα υπήρχε κύκλος εντός του T.

Φύλλα

- Αν $\deg u_3 = 1$, τότε τελειώσαμε. Αν όχι, τότε παίρνουμε έναν γείτονα της u_3, διαφορετικό της u_2, έστω $u_4 \in V$. Μάλιστα η u_4 δεν ενώνεται με ακμή με τις u_1, u_2, γιατί τότε θα υπήρχε κύκλος εντός του T.
- Η παραπάνω διαδικασία κάποια στιγμή θα τελειώσει υποχρεωτικά, καθώς μέσα από αυτήν χτίζουμε ένα συνεχώς αυξανόμενο σε τάξη υποσύνολο του V, το οποίο όμως είναι πεπερασμένο.
- Με άλλα λόγια, κάποια στιγμή θα βρεθεί κάποια κορυφή βαθμού 1.

Φύλλα

Πόρισμα

Ένα δέντρο με $n \geq 2$ κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Για την απόδειξη του παραπάνω μιμούμαστε την απόδειξη της τελευταίας πρότασης, με την διαφορά ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\deg u_1 = 1$ (αφού έχουμε ήδη δείξει ότι υπάρχει ένα φύλλο), και συνεχίζοντας στο u_2 χωρίς τον έλεγχο κατά πόσο $\deg u_1 = 1$.

Το πλήθος των ακμών ενός δέντρου

Θεώρημα

Κάθε δέντρο με n κορυφές έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

- Για $n=1$ η πρόταση είναι προφανής.
- Έστω ότι ισχύει για $n=k$ (ΕΥ).
- Έστω T δέντρο $k+1$ κορυφών. Επειδή T δέντρο τουλάχιστον 2 κορυφών, έχουμε ότι το T θα έχει κάποιο φύλλο, έστω u. Διαγράφουμε από το T την u και την (μοναδική) ακμή της. Το γράφημα που παίρνουμε, έστω T' παραμένει συνεκτικό και δεν περιέχει κανέναν κύκλο (γιατί είναι υπογράφημα δέντρου). Με άλλα λόγια το T' είναι δέντρο. Από την ΕΥ, το T' έχει $k-1$ ακμές και από κατασκευής το T έχει μια παραπάνω, δηλαδή k.

Ο χαρακτηρισμός των δέντρων

Πόρισμα

Ένα συνεκτικό γράφημα n κορυφών είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει $n-1$ ακμές.

Η ευθεία κατεύθυνση είναι ακριβώς η προηγούμενη πρόταση.

Για το αντίστροφο, έχουμε ότι το γράφημα θα περιέχει ένα παράγων δέντρο. Εφόσον το παράγων δέντρο θα έχει (από την προηγούμενη πρόταση) $n-1$ ακμές, τότε θα πρέπει να έχει όλες τις ακμές του γραφήματός μας. Εφόσον εξ' ορισμού έχει και όλες τις κορυφές, καταλήγουμε ότι το γράφημα ταυτίζεται με το παράγων δέντρο του, άρα είναι δέντρο.