# ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

## 11η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 05/11/2020

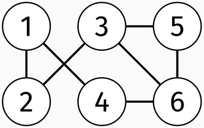
Πανεπιστήμιο Κρήτης

# Εισαγωγη στην Θεωρια Γραφηματων - Απλα Γραφηματα

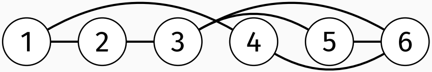
# Ορισμοί

Ένα απλό γράφημα $G = (V, E)$ αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών $V$ και ένα σύνολο ακμών $E$, το οποίο είναι ένα σύνολο δισυνόλων του $V$. Επίσης γράφουμε $V = V(G)$ και $E = E(G)$.

- Ένα απλό γράφημα αναπαρίσταται σχηματικά όπως φαίνεται στο παράδειγμα $G = (V, E)$, όπου $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$.

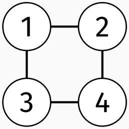



- Η γραφική αναπαράσταση ενός γραφήματος δεν είναι μοναδική:

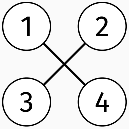


# Ορισμοί

- Δύο απλά γραφήματα $(V_1, E_1)$ και $(V_2, E_2)$ λέγονται συμπληρωματικά, αν $V_1 = V_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $E_1 \cup E_2 = \{\{x, y\} \mid x, y \in V_1, x \neq y\}$.
  Για παράδειγμα τα γραφήματα

  και

  είναι συμπληρωματικά.

# Μια συνδυαστική ερώτηση

**Παράδειγμα**

1. *Πόσα απλά γραφήματα υπάρχουν με $n$ κορυφές;*
2. *Πόσα απλά γραφήματα υπάρχουν με $n$ κορυφές και $k$ ακμές;*

1. Έχουμε συνολικά $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές. Επομένως το σύνολο των ακμών έχει
$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$$
υποσύνολα.
2. Εδώ από τις συνολικά $\binom{n}{2}$ ακμές αναρωτιόμαστε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε $k$. Η απάντηση είναι
$$\binom{\binom{n}{2}}{k} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{k}.$$

# Γειτονικές ακμές και κορυφές

Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα.

- Αν $\{u, v\} \in E$, γράφουμε $u \sim v$ ή $u \overset{G}{\sim} v$ και λέμε ότι οι κορυφές $u, v$ είναι γείτονες ή γειτονικές.
- Αν $e_1, e_2 \in E$ τέτοιες ώστε $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, τότε γράφουμε $e_1 \sim e_2$ ή $e_1 \overset{G}{\sim} e_2$ και λέμε ότι οι ακμές $e_1, e_2$ είναι γείτονες ή γειτονικές.

**Παρατήρηση**

Παρατηρήστε ότι σε ένα απλό γράφημα μια κορυφή δεν είναι γειτονική με τον εαυτό της, ενώ μια ακμή είναι γειτονική με τον εαυτό της

# Γειτονιές και βαθμοί

Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα.

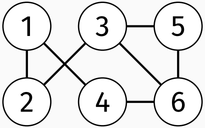
- Ως γειτονιά μιας κορυφής $u \in V$ (ή ακμής $e \in E$) ορίζεται το σύνολο των κορυφών (ή ακμών) με τις οποίες είναι γειτονική. Συμβολίζεται με $N(u)$ (ή $N(e)$ αντίστοιχα).
- Ως βαθμός μιας κορυφής ή ακμής ορίζεται ως η τάξη της γειτονιάς της. Συμβολικά

$$\deg(u) = |N(u)| \text{ και } \deg(e) = |N(e)|.$$

- Αν σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό $r$, τότε αυτό το γράφημα ονομάζεται κανονικό ή $r$-κανονικό.

# Ένα παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω γράφημα:




Έυκολα βλέπουμε ότι $N(1) = \{2, 4\}$, $N(2) = \{1, 3\}$, $N(3) = \{2, 5, 6\}$ και $N(3, 5) = \{\{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}$.

Επομένως παίρνουμε $\deg(1) = \deg(2) = 2$, $\deg(3) = 3$ και $\deg(3, 5) = 4$.

Επειδή υπάρχουν κορυφές με διαφορετικούς βαθμούς μεταξύ τους, έχουμε ότι το γράφημα αυτό δεν είναι κανονικό.

# Μερικές απλές προτάσεις

**Πρόταση**

*Σε ένα πεπερασμένο απλό γράφημα υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό.*

Έστω $G = (V, E)$, με $|V| = n$ τέτοιο ώστε κάθε κορυφή έχει διαφορετικό βαθμό.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο βαθμός μιας κορυφής βρίσκεται στο σύνολο $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Εφόσον το σύνολο αυτό έχει τάξη $n$, όπως και το σύνολο των βαθμών, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει ακριβώς μια $u_x \in V$ τέτοια ώστε $\deg(u_x) = x$.

# Μερικές απλές προτάσεις

Πιο συγκεκριμένα θα υπάρχει μια κορυφή $u_0$ βαθμού 0 και μια κορυφή $u_{n-1}$ βαθμού $n-1$. Αυτό σημαίνει ότι η κορυφή $u_0$ δεν γειτονεύει με καμμία άλλη κορυφή, ενώ η $u_{n-1}$ γειτονεύει με $n-1$ κορυφές, δηλαδή με όλες τις άλλες κορυφές!

Εύκολα βλέπουμε ότι τα παραπάνω δεν μπορούν να συμβαίνουν ταυτόχρονα, άτοπο!

**Παρατήρηση**

Παρατηρήστε ότι εδώ ουσιαστικά αποδείξαμε ότι ένα απλό γράφημα $n$ κορυφών: (α) ο βαθμός μιας κορυφής $u$ ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq \deg(u) \leq n-1$ και (β) δεν μπορούν να εμφανίζονται ταυτόχρονα οι βαθμοί 0 και $n-1$ ως βαθμοί κορυφών.

# Μερικές απλές προτάσεις

**Θεώρημα (Χειραψιών)**

*Αν* $G = (V, E)$ *ένα απλό γράφημα, τότε*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε ακμή θα μετρηθεί στο αριστερό άθροισμα ακριβώς δύο φορές (μια για κάθε άκρο της). Το ζητούμενο έπεται.

# Μερικές απλές προτάσεις

**Πόρισμα**

*Αν $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα, τότε το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.*

Θέτουμε

$V_1 = \{u \in V \mid \deg(u) \text{ άρτιος}\}$ και $V_2 = \{u \in V \mid \deg(u) \text{ περιττός}\}$.

Προφανώς έχουμε ότι $V_1 \cup V_2 = V$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Επομένως από το θεώρημα των χειραψιών έχουμε:

$$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = \sum_{u \in V_1} \deg(u) + \sum_{u \in V_2} \deg(u).$$

Επειδή $2|E|$ και $\sum_{u \in V_1} \deg(u)$ άρτιοι, παίρνουμε ότι $\sum_{u \in V_2} \deg(u)$ άρτιος. Το ζητούμενο έπεται.

# Μερικές απλές προτάσεις

**Πόρισμα**

*Ένα $r$-κανονικό γράφημα με $n$ κορυφές έχει $nr/2$ ακμές.*

Αν $G = (V, E)$ ένα τέτοιο γράφημα, τότε, από το θεώρημα των χειραψιών έχουμε ότι

$$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = \sum_{u \in V} r = nr.$$

Το ζητούμενο έπεται.

# Ένα σχόλιο

Ένα ερώτημα που τίθεται συχνά στην Θεωρία Γραφημάτων, είναι κατά πόσο υπάρχει ένα απλό γράφημα με δεδομένους βαθμούς κορυφών.

Για να απαντήσουμε θετικά στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να κατασκευάσουμε ή να περιγράψουμε το γράφημα αυτό.

Για να απαντήσουμε αρνητικά, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ένα τέτοιο γράφημα δεν μπορεί να υπάρξει για κάποιο λόγο. Οι προηγούμενες προτάσεις είναι τα πρώτα μας εφόδια για να δίνουμε τέτοιες (αρνητικές) απαντήσεις.

# Μερικά παραδείγματα

**Παράδειγμα**

*Υπάρχει απλό γράφημα με βαθμούς κορυφών* $0, 1, 3, 4, 4$;

Παρατηρούμε ότι το γράφημα αυτό έχει 5 κορυφές. Δύο από αυτές τις κορυφές θα πρέπει να συνδέονται με όλες τις άλλες, όμως μια κορυφή δεν συνδέεται με καμία άλλη. Άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

**Παράδειγμα**

*Υπάρχει απλό γράφημα με βαθμούς κορυφών* $1, 2, 3, 3, 4, 4$;

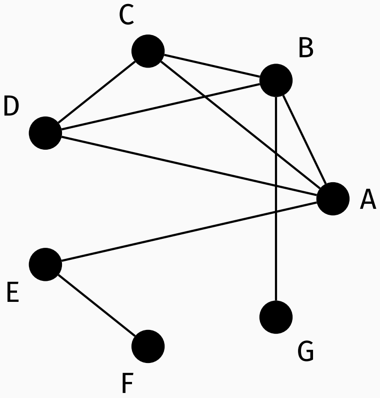
Παρατηρούμε ότι το γράφημα έχει 3 κορυφές περιττού βαθμού. Επομένως δεν μπορεί να υπάρξει τέτοιο γράφημα.

# Μερικά παραδείγματα

**Παράδειγμα**

*Υπάρχει απλό γράφημα με βαθμούς κορυφών* $1, 1, 2, 3, 3, 4, 4$*;*

Παρατηρώ ότι το παρακάτω γράφημα ικανοποιεί τις συνθήκες.



# Μερικά παραδείγματα

**Παράδειγμα**

1. *Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με 7 ακμές;*
2. *Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με 7 κορυφές;*

1. Έστω ότι το ζητούμενο γράφημα έχει $n$ κορυφές. Τότε πρέπει
$$|E| = nr/2 \Rightarrow 14 = 3n \Rightarrow 3 \mid 14,$$
άτοπο.
2. Ένα τέτοιο γράφημα θα είχε περιττό πλήθος κορυφών περιττού βαθμού, αδύνατο.

# Μερικά παραδείγματα

**Παράδειγμα**

*Υπάρχει $n$-κανονικό γράφημα με $2n$ κορυφές.*

Διαμερίζουμε τις $2n$ κορυφές σε δύο σύνολα μεγέθους $n$ το καθένα. Ενώνουμε την κάθε κορυφή του πρώτου συνόλου με κάθε κορυφή του δεύτερου. Παρατηρούμε ότι το γράφημα που κατασκευάσαμε είναι $n$-κανονικό με $2n$ κορυφές.