MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

9η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 29/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Γεννητριες Συναρτησεις

Εισαγωγή

Ορισμός

Έστω $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ μια ακολουθία. Η γεννήτρια συνάρτηση της $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ είναι η

$$G(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k.$$

Ομοίως, η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας είναι η

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \cdot x^k.$$

Μερικές παρατηρήσεις

1. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια άμεση σύνδεση μεταξύ γεννητριών συναρτήσεων και δυναμοσειρών.
2. Παρόλα αυτά, τις γεννήτριες συναρτήσεις τις βλέπουμε ως τυπικά αθροίσματα και δεν μας ενδιαφέρουν ζητήματα σύγκλισης.
3. Με άλλα λόγια, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις γνώσεις που έχουμε από την μελέτη των δυναμοσειρών, όπως γνωστές δυναμοσειρές κτλ., αλλά για εμάς το x θα είναι μια μεταβλητή και όχι κάποιος πραγματικός αριθμός.

Μερικά παραδείγματα

- Αν $\alpha_k = 3$, $\beta_k = k + 1$ και $\gamma_k = 2^k$, τότε οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις είναι οι
$$G_1 = \sum_{k=0}^{\infty} 3x^k,\ G_2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,\ G_3 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k.$$
- Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $1, 1, 1, 1, 1$ είναι η
$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}.$$
- Αν $\alpha_k = \binom{n}{k}$, τότε από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k,$$
άρα η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $G(x) = (1+x)^n$.

Άθροισμα και γινόμενο γεννητριών συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι $A(x)$ και $B(x)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$ αντίστοιχα. Τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

- η $\Gamma(x) = A(x) + B(x)$ είναι η γεννήτρια της $\{\gamma_k\}$: $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$,
- n $\Delta(x) = A(x) \cdot B(X)$ είναι γεννήτρια της $\{\delta_k\}$: $\delta_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}$.

Ορισμός

Η ακολουθία $\{\delta_k\}$: $\delta_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}$ ονομάζεται συνέλιξη των $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$.

Εφαρμογές σε προβλήματα απαρίθμησης

Παράδειγμα

Βρείτε το πλήθος των λύσεων (ως προς n) της εξίσωσης $e_1 + e_2 + e_3 = n$, όπου $2 \leq e_1 \leq 5$, $3 \leq e_2 \leq 6$, $4 \leq e_3 \leq 7$ και $e_i \in \mathbf{Z}$.

Έστω $\{a_k\}$ η ακολουθία που μας ενδιαφέρει. Η γεννήτρια συνάρτησή της είναι η

$$\begin{aligned}
G(x) &= (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7) \\
&= x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 10x^{12} + 12x^{13} + 12x^{14} \\
&\qquad + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}.
\end{aligned}$$

Ο συντελεστής του x^n στο παραπάνω πολυώνυμο, δείχνει πόσες λύσεις έχει για το αντίστοιχο n η παραπάνω εξίσωση.

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω 8 (ίδια) γλυκά σε 3 παιδιά, έτσι ώστε κάθε παιδί να πάρει από 2 εώς 4 γλυκά;

Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{\alpha_n\}$, όπου α_n είναι το πλήθος των τρόπων που μπορώ να μοιράσω n γλυκά στα παραπάνω 3 παιδιά, έτσι ώστε το καθένα να πάρει από 2 εώς 4 γλυκά είναι

$$\begin{aligned} G(x) = (x^2+x^3+x^4)^3 = \binom{3}{3,0,0}(x^6+x^9+x^{12}) + \\ \binom{3}{2,1,0}(x^7+x^8+x^8+x^{10}+x^{10}+x^{11}) + \binom{3}{1,1,1}x^9 \\ = x^6+3x^7+6x^8+7x^9+6x^{10}+3x^{11}+x^{12}. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 6 τέτοιοι τρόποι.

Μία παρατήρηση

Ίσως στα παραπάνω προβλήματα να μην είναι εμφανές το όφελος από την χρήση γεννητριών συναρτήσεων, καθώς μπορούμε να προσεγγίσουμε τα προβλήματα αυτά και με άλλους τρόπους. Όμως έχουμε τα εξής δύο πλεονεκτήματα:

1. Βρίσκοντας την γεννήτρια συνάρτηση, μπορούμε να απαντήσουμε πολλαπλά ερωτήματα ταυτόχρονα.
2. Μεταφράζουμε ένα συνδυαστικό πρόβλημα σε ένα αλγεβρικό που περιλαμβάνει πράξεις με πολυώνυμα του $\mathbf{Z}[x]$, ενώ οι πράξεις με τέτοια πολυώνυμα γίνονται πολύ γρήγορα από έναν υπολογιστή.

Εφαρμογή στις αναδρομικές σχέσεις

Παράδειγμα

Αν $\alpha_0 = 1$ και $\alpha_n = 8\alpha_{n-1} + 10^{n-1}$, βρείτε κλειστό τύπο για το α_n.

Έστω $G(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της $\{\alpha_n\}$. Έχουμε ότι

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

άρα

$$\begin{aligned} G(x) - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (8\alpha_{k-1} + 10^{k-1}) x^k \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (8\alpha_k + 10^k) x^k = 8x \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} (10x)^k. \end{aligned}$$

Εφαρμογή στις αναδρομικές σχέσεις

Παρατηρούμε ότι το πρώτο από τα δύο αθροίσματα είναι το $G(x)$ και το δεύτερο είναι το $\frac{1}{1-10x}$. Άρα παίρνουμε

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + \frac{x}{1-10x} \iff (1-8x)G(x) = \frac{1-9x}{1-10x}.$$

Από το τελευταίο παίρνουμε ότι

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-10x)(1-8x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right),$$

άρα

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(8x)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(10x)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(8^k+10^k)x^k.$$

Καταλήγουμε ότι $\alpha_k = \frac{1}{2}(8^k + 10^k)$.

Μια ακόμα εφαρμογή

Θεώρημα (Ταυτότητα του Vandermonde)

Για κάθε $r \leq m, n$ *ισχύει ότι*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}.$$

Θέτω $\alpha_k = \binom{m}{k}$, $\beta_k = \binom{n}{k}$ και $\gamma_k = \binom{m+n}{k}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\{\gamma_k\}$ είναι η συνέλιξη των $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$. Όπως έχουμε δει, οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις είναι

$$A(x) = (1+x)^m,\ B(x) = (1+x)^n \text{ και } \Gamma(x) = (1+x)^{m+n}.$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι $A(x)B(x) = \Gamma(x)$.