MEM241 - Διακριτα Μαθηματικα

8η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 23/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Αρχη του Εγκλεισμου-Αποκλεισμου

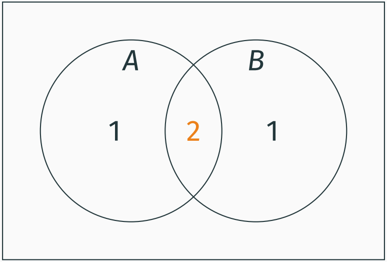
Εισαγωγή

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε σε προβλήματα απαρίθμησης είναι περιπτώσεις "διπλομετρήματος". Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν οι περιπτώσεις αυτές που ανήκουν σε περισσότερες από μια κατηγορίες (σύνολα) και ως εκ τούτου καταλήγουμε να τις μετράμε περισσότερες από μια φορές.

Η πιο απλή τέτοια περίπτωση είναι όταν έχουμε δύο σύνολα (A και B), τα οποία δεν είναι ξένα, και θέλουμε να μετρήσουμε το μέγεθος του $A \cup B$. Εδώ έχουμε αντικείμενα που βρίσκονται και στις δύο κατηγοριές.

Δύο σύνολα

Όταν θα προσθέσουμε τα μεγέθη $|A|$ και $|B|$, τότε, το κάθε στοιχείο, ανάλογα με το πού βρίσκεται θα έχει μετρηθεί τόσες φορές όσες φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

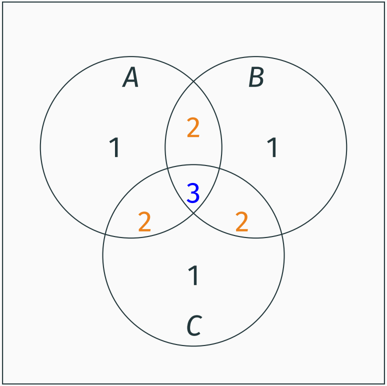


Επομένως, θα πρέπει να αφαιρέσουμε το $|A \cap B|$. Με άλλα λόγια, έχουμε το εξής:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Τρία σύνολα

Στα τρία σύνολα A,B και C, όταν θα προσθέσουμε τις τάξεις τους, κάθε στοιχείο της ένωσής τους μετριέται τόσες φορές, όσες φαίνεται στο σχήμα:



Τρία σύνολα

Άρα, θα ξεκινήσουμε αφαιρόντας από το άθροισμα $|A| + |B| + |C|$ τις τάξεις των συνόλων $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ και $|B \cap C|$.

Όμως έτσι θα έχουμε αφαιρέσει τρεις φορές το $|A \cap B \cap C|$, όσες δηλαδή φορές το προσθέσαμε! Άρα θα πρέπει να το προσθέσουμε και αυτό άλλη μια φορά.

Καταλήγουμε ότι ένας πλήρης τύπος απαρίθμησης είναι ο

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Η γενική περίπτωση

Θεώρημα (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού)

Έστω $A_1, \ldots, A_n$ πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = i}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.\end{aligned}$$

Απόδειξη

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα δείξουμε ένα λήμμα, που θα χρειαστούμε στην πορεία.

Λήμμα

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i} = 0, \quad \textit{για κάθε } r \geq 1.$$

Απόδειξη.

Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι

$$0 = (1-1)^r = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}1^{r-i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}.$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη (του κεντρικού θεωρήματος), αρκεί να δείξουμε ότι κάποιο $a \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ μετριέται ακριβώς μια φορά στο δεξί μέρος της εξίσωσης.

Ας υποθέσουμε ότι το a συναντάται σε ακριβώς r σύνολα εκ των $A_1, \cdots, A_n$. Αυτό το στοιχείο μετριέται:

- r φορές στο $\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i|$,
- $\binom{r}{2}$ φορές στο $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$,
- $\binom{r}{m}$ φορές στον όρο με τις τομές m συνόλων.

Επομένως θα έχει μετρηθεί (λαμβάνοντας υπόψιν τα πρόσημα)

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r} \overset{\text{Λήμμα}}{=} \binom{r}{0} = 1$$

φορά.

Παράδειγμα

Πόσοι αριθμοί ≤ 1000 *διαιρούνται από το 7 ή το 11;*

Θέτω D_7 το σύνολο των διαιρετών του 7 και D_{11} το σύνολο των διαιρετών του 11. Αναζητούμε το $|D_7 \cup D_{11}|$. Έχουμε ότι
$|D_7| = \lfloor 1000/7 \rfloor = \lfloor 142.85\ldots \rfloor = 142$ και
$|D_{11}| = \lfloor 1000/11 \rfloor = \lfloor 90.90\ldots \rfloor = 90$.

Ακόμα, έχουμε ότι $D_7 \cap D_{11} = D_{77}$, δηλαδή,
$|D_7 \cap D_{11}| = |D_{77}| = \lfloor 1000/77 \rfloor = \lfloor 12.98\ldots \rfloor = 12$.

Συνολικά

$$|D_7 \cup D_{11}| = |D_7| + |D_{11}| - |D_7 \cap D_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Σε ένα πανεπιστήμιο, 2092 φοιτητές μαθαίνουν ξένες γλώσσες. Από αυτούς, 1232 φοιτητές μαθαίνουν Ισπανικά, 879 μαθαίνουν Γαλλικά και 114 Ρώσικα. Ακόμα, 103 μαθαίνουν Ισπανικά και Γαλλικά, 23 Ισπανικά και Ρώσικα και 12 Γαλλικά και Ρώσικα. Πόσοι φοιτητές μαθαίνουν και τις τρεις γλώσσες;

Θέτουμε I το σύνολο των φοιτητών που μαθαίνουν Ισπανικά, Γ εκείνων που μαθαίνουν Γαλλικά και P εκείνων που μαθαίνουν Ρώσικα. Ψάχνουμε τον αριθμό $|I \cap \Gamma \cap P|$. Έχουμε ότι

$$\underbrace{|I \cup \Gamma \cup P|}_{=2092} = \underbrace{|I|}_{=1232} + \underbrace{|\Gamma|}_{=879} + \underbrace{|P|}_{=114} - \underbrace{|I \cap \Gamma|}_{=103} - \underbrace{|I \cap P|}_{=23} - \underbrace{|\Gamma \cap P|}_{=12} + \underbrace{|I \cap \Gamma \cap P|}_{=x}$$

$$\iff x = 2092 - 1232 - 879 - 114 + 103 + 23 + 12 = 5.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, *με* $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 4$ *και* $0 \le x_3 \le 6$*;*

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} N &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3_{\ge 0} \ : x_1 + x_2 + x_3 = 11\} \\ N_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3_{\ge 0} \ : x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ και } x_1 \ge 4\}, \\ N_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3_{\ge 0} \ : x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ και } x_2 \ge 5\}, \\ N_3 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3_{\ge 0} \ : x_1 + x_2 + x_3 = 11 \text{ και } x_3 \ge 7\}. \end{aligned}$$

Ψάχνουμε τον αριθμό $A = |N| - |N_1 \cup N_2 \cup N_3|$. Έχουμε ότι

$$|N| = P(11, 3) = \binom{11 + 3 - 1}{11} = \binom{13}{11} = 78.$$

Παραδείγματα

Ακόμα,

$$\begin{aligned}|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = |N_1| + |N_2| + |N_3| \\ - |N_1 \cap N_2| - |N_1 \cap N_3| - |N_2 \cap N_3| + |N_1 \cap N_2 \cap N_3|.\end{aligned}$$

Με γνωστές τεχνικές υπολογίζουμε:

$$|N_1| = P(7,3) = 36,\ |N_2| = P(6,3) = 28,\ |N_3| = P(4,3) = 15,$$
$$|N_1 \cap N_2| = P(2,3) = 6, |N_1 \cap N_3| = P(0,3) = 1,$$
$$|N_2 \cap N_3| = P(-1,3) = 0, |N_1 \cap N_2 \cap N_3 = P(-5,3) = 0.$$

Άρα, $|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = 72$ και $A = 78 - 72 = 6$.

Μία εφαρμογή

Θεώρημα

Έστω $m \geq n$ θετικοί ακέραιοι. Υπάρχουν

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

επί συναρτήσεις από ένα σύνολο m στοιχείων σε ένα σύνολο n στοιχείων.

Απόδειξη

Χβγ μπορούμε να υποθέσουμε ότι ψάχνουμε τις επί συναρτήσεις από το $[m]$ στο $[n]$. Θέτουμε, για $i = 1, \ldots, n$, $F_i := \{f : [m] \to [n] \setminus \{i\}\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ουσιαστικά ψάχνουμε τον αριθμό

$$|[n]^{[m]}| - |F_1 \cup \cdots \cup F_n| = n^m - |F_1 \cup \cdots \cup F_n|.$$

Σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |F_1 \cup \cdots \cup F_n| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = i}} \left| \bigcap_{j \in J} F_j \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J| = i}} (n-i)^m \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^m. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται.

Ένα τελευταίο παράδειγμα

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 8 αριθμημένες μπάλες σε 3 αριθμημένα καλάθια, έτσι ώστε κανένα καλάθι να μην μείνει άδειο;

Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των επί συναρτήσεων από το σύνολο των μπαλών σε εκείνο των καλαθιών. Επομένως θα έχουμε

$$3^8 - \binom{3}{1}2^8 + \binom{3}{2}1^8 = 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3$$

τρόπους.