ΜΕΜ241 - Διακριτα Μαθηματικα

7η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 22/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Πολυωνυμικοί Συντελεστές

Εισαγωγή

Το επόμενο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να διαμερίσουμε ένα σύνολο μεγέθους n σε υποσύνολα μεγέθους $k_1, \ldots, k_r$, με $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Πρόκειται για γενίκευση της επιλογής ενός υποσυνόλου μεγέθους k, αν σκεφτούμε ότι σε τότε ουσιαστικά διαμερίζουμε το σύνολό μας σε δύο σύνολα μεγέθους k και $n - k$ αντίστοιχα.

Θεώρημα

Το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου μεγέθους n σε r σύνολα μεγέθους $k_1, \ldots, k_r$, τέτοια ώστε $k_1 + \cdots + k_r = n$ (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα σύνολα) είναι

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Απόδειξη

- Το πρώτο σύνολο μπορεί να επιλεχθεί με $\binom{n}{k_1}$ τρόπους.
- Το δεύτερο με $\binom{n-k_1}{k_2}$ τρόπους.
- Το τρίτο με $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ τρόπους κ.ο.κ.

Επομένως έχουμε συνολικά

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdots\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}{k_r!\cdot 1} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$$

τρόπους.

Σχόλια

- Ο αριθμός $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ ονομάζεται πολυωνυμικός συντελεστής και αποτελεί γενίκευση του διωνυμικού συντελεστη $\binom{n}{k}$.
- Η ονομασία του διωνυμικού συντελεστή έχει προέλθει από το διωνυμικό θεώρημα (πού έχουμε δει). Η ονομασία του πολυωνυμικού προέρχεται από το πολυωνυμικό θεώρημα (που θα δούμε σήμερα) και αποτελεί γενίκευση του διωνυμικού.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν δίκαια $n = rk$ (διαφορετικές) κάρτες σε

1. *r παιδιά,*
2. *r (ίδια) κουτιά.*

1. Κάθε ένα από τα r παιδιά θα πάρει k κάρτες. Άρα έχουμε $\binom{n}{k,k,\ldots,k} = \frac{n!}{k!\cdots k!} = \frac{n!}{(k!)^r}$ τρόπους.
2. Εφόσον τα κουτιά είναι ίδια, αν ξεκινήσουμε με το προηγούμενο μέτρημα, έχουμε κάνει διπλομετρήματα και μάλιστα κάθε περίπτωση την έχουμε μετρήσει $r!$ φορές. Άρα τώρα έχουμε $\frac{n!}{(k!)^r \cdot r!}$ τρόπους.

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε 5 γράμματα A, 3 γράμματα B και 4 γράμματα Γ;

Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Παίρνουμε το σύνολο [12] και το διαμερίζουμε σε 3 σύνολα, το S_A μεγέθους 5, το S_B μεγέθους 3 και το S_Γ μεγέθους 4. Οι αριθμοί που θα βρεθούν στο S_A δείχνουν τις θέσεις που θα τοποθεί το γράμμα A και αντίστοιχα με τα S_B και το S_Γ.

Εύκολα βλέπουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε αυτά τα σύνολα με $\binom{12}{5,3,4} = \frac{12!}{5!3!4!}$.

Το πολυωνυμικό θεώρημα

Θεώρημα (Πολυωνυμικό θεώρημα)

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{b_1 + \cdots + b_k = n} \binom{n}{b_1, \ldots, b_k} \prod_{j=1}^{k} x_j^{b_j}.$$

- Εύκολα βλέπουμε ότι πρόκειται για γενίκευση του διωνυμικού θεωρήματος (όπου $k = 2$).
- Το παραπάνω μπορεί να αποδειχθεί με χρήση επαγωγή στο k και με χρήση του διωνυμικού. (Άσκηση)
- Όμως μπορούμε να το αποδείξουμε και με συνδυαστικό τρόπο, κάνοντας εισαγωγή και σε αυτόν τον τρόπο απόδειξης!

Απόδειξη

Θεωρούμε έναν όρο του $(x_1 + \cdots + x_k)^n$. Ο όρος θα είναι της μορφής

$$\alpha \prod_{i=1}^{k} x_i^{\beta_i}$$

για κάποιο $\alpha \in \mathbf{Z}$ και μη αρνητικούς ακέραιους β_i. Εφόσον κάθε όρος προέρχεται επιλέγοντας έναν όρο του αθροίσματος $x_1 + \cdots + x_k$, έχουμε ότι $\beta_1 + \cdots + \beta_k = n$. Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων για να πάρουμε τον όρο αυτόν ισούται με το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να πάρουμε β_1 φορές το x_1, β_2 φορές το x_2 κ.ο.κ.. Καταλήγουμε ότι $\alpha = \binom{n}{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}$.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Ποιός είναι ο συντελεστής του x^3y^5 στο ανάπτυγμα του $(1+x+y)^{12}$;

Σύμφωνα με το πολυωνυμικό θεώρημα, ουσιαστικά ψάχνουμε τον όρο $1^4x^3y^5$, που θα εμφανίζεται

$$\binom{12}{4,3,5} = \frac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 5!} = 27720$$

φορές.

Συνδυαστικές Αποδείξεις

Εισαγωγή

Μερικές φορές μπορούμε να αποδείξουμε ταυτότητες με συνδυαστικά επιχειρήματα. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι τα δύο μέρη της προς απόδειξη εξίσωσης μετράνε την ίδια ποσότητα, απλά με διαφορετική μέθοδο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα!

Το τρίγωνο του Pascal

- Γνωρίζουμε ότι το $[n]$ έχει $\binom{n}{k}$ υποσύνολα μεγέθους k.
- Μπορούμε αυτά τα υποσύνολα να τα χωρίσουμε σε δύο κατηγορίες: αυτά που περιέχουν το n και αυτά που δεν το περιέχουν.
- Για την πρώτη περίπτωση, ουσιαστικά επιλέγουμε $k-1$ στοιχεία από το $[n-1]$, άρα έχουμε $\binom{n-1}{k-1}$ τέτοια σύνολα και για την δεύτερη, επιλέγουμε ολα τα στοιχεία από το $[n-1]$, άρα έχουμε $\binom{n-1}{k}$.

Δείξαμε το τρίγωνο του Pascal, δηλαδή ότι

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Ένα άλλο παράδειγμα

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Και τα δύο μέλη της εξίσωσης δείχνουν το πλήθος των ζευγών (x, M), τέτοια ώστε $M \subseteq [n]$ και $x \in M$.

- Στο αριστερό μέρος ξεκινάμε με το γεγονός ότι το μέγεθος του M μπορεί να πάρει τιμές από 1 εώς n, για κάθε τέτοιο μέγεθος έχουμε $\binom{n}{k}$ επιλογές για το M και για κάθε M μεγέθους k, έχουμε k επιλογές για το x.
- Στο δεξί μέρος, ξεκινάμε από την επιλογή του x, για το οποίο έχουμε n επιλογές. Μετά παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς 2^{n-1} υποσύνολα του $[n]$ που περιέχουν το x (μιας και μπορούμε να τα αντιστοιχίσουμε με τα υποσύνολα του $[n] \setminus \{x\}$).

Ένα τελευταίο παράδειγμα

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$.

Θα δείξουμε ότι και τα δύο μέρη δείχνουν τον τρόπο επιλογής 2 στοιχείων από ένα σύνολο μεγέθους $2n$. Για το αριστερό μέρος, το παραπάνω είναι άμεσο.

Για το δεξί, χωρίζουμε το σύνολο σε δύο ομάδες μεγέθους n η κάθε μία. Άρα τα δύο στοιχεία, είτε θα ανήκουν και τα δύο στην πρώτη, είτε και τα δύο στην δεύτερη είτε το ένα στην πρώτη και το άλλο στην δεύτερη. Η πρώτη και η δεύτερη περίπτωση έχουν $\binom{n}{2}$ τρόπους, ενώ η τρίτη περίπτωση n^2.

Δείξαμε ότι $\binom{2n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n^2 = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$.

Bonus!

Παράδειγμα

Αποδείξτε συνδυαστικά ότι $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να δούμε (δείξτε το!) ότι το αριστερό μέρος μετράει το μέγεθος του συνόλου

$$\mathcal{A} := \{(A,B) \ : \ A,B \subseteq [n], |A| = i, |B| = k-i, A\cap B = \emptyset\}.$$

Αντίστοιχα το δεξί μετράει το μέγεθος του

$$\mathcal{B} := \{(C,D) \ : \ C,D \subseteq [n], |C| = i, |D| = k, C \subseteq D\}.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $(A,B) \mapsto (A, A\cup B)$ είναι 1-1 και επί.