ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

6η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 15/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Προχωρημένη απαρίθμηση – Διαμερίσεις και συνδυασμοί με επανάθεση

Θέτουμε $P(n, r)$ ως το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να γράψουμε τον μη-αρνητικό ακέραιο n ως άθροισμα r μη-αρνητικών ακεραίων.

Παράδειγμα

Έχουμε ότι $3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 + 0$, *επομένως* $P(3, 2) = 4$.

Θεώρημα

Για κάθε $n, r \geq 0$, *έχουμε ότι* $P(n, r) = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σειρά από n μπάλες τοποθετημένες σε σειρά. Το ερώτημα μπορεί πλέον να ερωτηθεί και με τον εξής τρόπο:

> *Με πόσους τρόπους μπορώ να χωρίσω τις n μπάλες σε r ομάδες στην ευθεία, επιτρέποντας και κενές ομάδες;*

Εύκολα μπορούμε να σκεφτούμε ότι ο τυχαίος τέτοιος διαχωρισμός γίνεται, αν ανάμεσα στις μπάλες τοποθετήσουμε και $r - 1$ *σύνορα* που θα οριοθετούν την αρχή και το τέλος κάθε ομάδας.

Απόδειξη

Για παράδειγμα, αν συμβολίσουμε με I ένα σύνορο και με O μια μπάλα, οι τέσσερεις τρόποι που γράψαμε το 3 στην προηγούμενη διαφάνεια αντιστοιχούν ως εξής:

$$
\begin{aligned}
0 + 3 &\to \mathrm{IOOO}\\
1 + 2 &\to \mathrm{OIOO}\\
2 + 1 &\to \mathrm{OOIO}\\
3 + 0 &\to \mathrm{OOOI}
\end{aligned}
$$

Απόδειξη

Ας δούμε πώς θα μοντελοποιήσουμε το ίδιο ερώτημα για το 3 ως άθροισμα 3 προσθεταίων:

$$3 = 3 + 0 + 0 \to \mathsf{OOOII}$$

$$3 = 2 + 1 + 0 \to \mathsf{OOIOI}$$

$$3 = 2 + 0 + 1 \to \mathsf{OOIIO}$$

$$3 = 1 + 2 + 0 \to \mathsf{OIOOI}$$

$$3 = 1 + 1 + 1 \to \mathsf{OIOIO}$$

$$3 = 1 + 0 + 2 \to \mathsf{OIIOO}$$

$$3 = 0 + 3 + 0 \to \mathsf{IOOOI}$$

$$3 = 0 + 2 + 1 \to \mathsf{IOOIO}$$

$$3 = 0 + 1 + 2 \to \mathsf{IOIOO}$$

$$3 = 0 + 0 + 3 \to \mathsf{IIOOO}$$

Απόδειξη

Επομένως εύκολα βλέπουμε ότι ουσιαστικά το αρχικό μας πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να έχουμε $n + r - 1$ αντικείμενα (ή ισοδύναμα το $[n + r - 1]$) και να πρέπει να επιλέξουμε n από αυτά να γίνουν μπάλες (ή ισοδύναμα να επιλέξουμε τα $r - 1$ από αυτά να γίνουν σύνορα).

Καταλήγουμε ότι συνολικά θα έχουμε

$$\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

τέτοιους τρόπους.

Ένα διαφορετικό (αλλά ίδιο) σενάριο

Ας θεωρήσουμε τώρα το εξής σενάριο: Σε μια ανώνυμη ψηφοφορία, έχουμε n υποψήφιους και k ψηφοφόρους και θέλουμε να μετρήσουμε όλα τα δυνατά εκλογικά απότελέσματα.

Στο σενάριο αυτό:

- Κάθε μια από τις k ψήφους ανήκει στο $[n]$.
- Κάθε στοιχείο του $[n]$ μπορεί να εμφανιστεί καμμία, μία ή πολλές φορές.
- Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των ψήφων, αλλά μόνο το πλήθος των ψήφων που συγκεντρώνει κάθε υποψήφιος.

Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων ονομάζεται συνδυασμοί των n στοιχείων ανά k με επανάθεση και συμβολίζεται με $\left[{n \atop k}\right]$ ή $\left\langle{n \atop k}\right\rangle$.

Ένα διαφορετικό (αλλά ίδιο) σενάριο

Θεώρημα

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = P(k, n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Η απόδειξη είναι άμεση, αν σκεφτούμε, π.χ. στο παράδειγμα της ψηφοφορίας, ότι ουσιαστικά αναρωτιόμαστε με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι k ψήφοι σε ένα άθροισμα n μη-αρνητικών προσθεταίων.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Έστω n αριθμημένα κουτιά χωρητικότητας n, στα οποία τοποθετούμε όμοιες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε μπάλες στα κουτιά; Πώς θα αλλάξει η απάντηση αν τα κουτιά δεν είναι αριθμημένα;

Αριθμημένα κουτιά: Το κάθε κουτί έχει $n+1$ τρόπους για να τοποθετηθούν μπάλες σε αυτό. Εφόσον έχουμε n τέτοια κουτιά, συνολικά θα έχουμε

$$\underbrace{(n+1)\cdots(n+1)}_{n \text{ φορές}} = (n+1)^n$$

τρόπους.

Παραδείγματα

Μη αριθμημένα κουτιά - 1ος τρόπος: Για $i = 0, 1, \ldots, n$, θέτω a_i το πλήθος των κουτιών με i μπάλες. Ακόμα, έχουμε ότι θα πρέπει

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = n.$$

Καταλήγουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι $P(n, n+1) = \binom{2n}{n}$.

Μη αριθμημένα κουτιά - 2ος τρόπος: Το πλήθος των κουτιών είναι n και των επιλογών για κάθε κουτί $n+1$ ($\{0, 1, \ldots, n\}$). Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι επιτρέπεται δύο κουτιά να περιέχουν το ίδιο πλήθος μπαλών, σημαίνει ότι ψάχνουμε τον συνδυασμό των $n+1$ ανά n με επανατοποθέτηση. Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} = \binom{2n}{n}.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Στο ισόγειο ενός 6-όροφου κτηρίου επιβιβάζονται στο ασανσέρ 8 άτομα και ανεβαίνουν. Σε κάθε όροφο κατεβαίνουν κάποιοι από αυτούς. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αποβίβασή τους, αν:

1. *Οι επιβάτες είναι ίδιοι;*
2. *Οι επιβάτες είναι 5 (ίδιες) γυναίκες και 3 (ίδιοι) άντρες;*
3. *Επαναλάβετε τα παραπάνω, με την επιπλέον προϋπόθεση ότι τουλάχιστον ένας θα πρέπει να αποβιβαστεί στον 6ο όροφο.*

Παραδείγματα

Ξεκινάμε με τους 8 ίδιους επιβάτες. Θέτω a_i ως το πλήθος των επιβατών που θα αποβιβαστούν στον i-στο όροφο ($i = 1, \ldots, 6$). Τότε θα έχω ότι

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 8.$$

Επομένως η απάντηση είναι

$$P(8, 6) = \binom{8 + 6 - 1}{8} = \binom{13}{8}.$$

Μπορείτε να βρείτε άλλο τρόπο να φτάσετε στο ίδιο αποτέλεσμα;

Παραδείγματα

Συνεχίζουμε με τις 5 ίδιες γυναίκες και τους 3 ίδιους άνδρες. Όπως και πριν, θα έχουμε $P(5,6)$ τρόπους για να αποβιβαστούν οι γυναίκες και $P(3,6)$ τρόπους για να αποβιβαστούν οι άνδρες. Από την αρχή του πολλαπλασιασμού, παίρνουμε ότι η απάντησή μας είναι

$$P(5,6)\cdot P(3,6)=\binom{10}{5}\binom{8}{3}.$$

Μπορείτε να βρείτε άλλο τρόπο να φτάσετε στο ίδιο αποτέλεσμα;

Παραδείγματα

Ας πάμε τώρα στους 8 ίδιους επιβάτες, με τουλάχιστον έναν να αποβιβάζεται στον 6ο. Εδώ, με τον ίδιο συμβολισμό με πριν, αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 8,$$

όπου $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ και $a_6 \geq 1$. Αν θέσω $a_6' := a_6 - 1 \iff a_6 = a_6' + 1$, τότε, η εξίσωση γίνεται

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6' = 7,$$

όπου όλοι οι αριθμοί είναι ≥ 0. Η τελευταία γνωρίζουμε ότι έχει $P(7, 6) = \binom{12}{7}$ τρόπους να λυθεί.

Παραδείγματα

Ας πάμε τώρα στις 5 ίδιες γυναίκες και 3 ίδιους άντρες, με τουλάχιστον έναν επιβάτη να αποβιβάζεται στον 6ο.

Το πρόβλημα εδώ γίνεται πολύπλοκο, και ο λόγος είναι ότι είναι εύκολο να πέσουμε στην "παγίδα" να πετρήσουμε κάποιο ενδεχόμενο πολλές φορές (διπλομετρήματα). Επομένως θα πρέπει να χωρίσουμε το πρόβλημα σε κάποια ενδεχόμενα που είναι τελείως ξένα και μετά να προσθέσουμε τα αντίστοιχα πλήθη. Ένας τέτοιος τρόπος εδώ είναι ο εξής:

1. Στον 6ο αποβιβάζεται τουλάχιστον μια γυναίκα και κανένας άνδρας.
2. Στον 6ο αποβιβάζεται τουλάχιστον ένας άνδρας και καμμία γυναίκα.
3. Στον 6ο αποβιβάζεται τουλάχιστον ένας άνδρας και τουλάχιστον μία γυναίκα.

Παραδείγματα

1. Εδώ έχουμε $P(4,6)$ τρόπους για τις γυναίκες και $P(3,5)$ τρόπους για τους άντρες. Συνολικά $P(4,6)P(3,5)$ τρόπους.
2. Εδώ έχουμε $P(5,5)$ τρόπους για τις γυναίκες και $P(2,6)$ τρόπους για τους άντρες. Συνολικά $P(5,5)P(2,6)$ τρόπους.
3. Εδώ έχουμε $P(4,6)$ τρόπους για τις γυναίκες και $P(2,6)$ τρόπους για τους άντρες. Συνολικά $P(4,6)P(2,6)$ τρόπους.

Άρα η τελική απάντηση είναι

$$P(4,6)P(3,5)+P(5,5)P(2,6)+P(4,6)P(2,6).$$

Παράδειγμα

Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

(α) αν $x_i \geq 0$*, (β) αν* $x_i > 0$*;*

Για το (α) η απάντηση είναι προφανώς $P(10, 4) = \binom{13}{10}$.

Για το (β) παρατηρούμε ότι $x_i > 0 \iff x_i \geq 1 \iff x_i' \geq 0$, όπου $x_i' := x_i - 1$. Τώρα η εξίσωση γίνεται

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 6,$$

που έχει $P(6, 4) = \binom{9}{6}$ λύσεις.

Παράδειγμα

Πόσοι ακέραιοι $1 \leq n \leq 99999$ έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 9;

Παρατηρούμε ότι $0 \leq n \leq 99999 \iff n = n_0 + 10n_1 + 10^2n_2 + 10^3n_3 + 10^4n_4$, όπου $0 \leq n_i \leq 9$. Μάλιστα, η παραπάνω γραφή είναι μοναδική και από αυτήν προκύπτει η γραφή του n στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Για το δικό μας πρόβλημα, στην ουσία ψάχνουμε το πλήθος των μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων της

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9,$$

που είναι $P(9,5) = \binom{13}{9}$.

Μπορείτε να σκεφτείτε παραλλαγές της παραπάνω ερώτησης και πώς θα τις αντιμετωπίζατε;