ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

5η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 14/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Μη Διατεταγμένες Επιλογές - Συνδυασμοί

Το βασικό θεώρημα

Το επόμενο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι, με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω k στοιχεία μέσα από ένα σύνολο n στοιχείων (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά που τα διαλέγω). Με άλλα λόγια, πόσα υποσύνολα μεγέθους k έχει το $[n]$;

Θεώρημα

Αν $0 \leq k \leq n$, τότε το $[n]$ έχει

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

υποσύνολα μεγέθους k.

Μερικές παρατηρήσεις

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, ας δούμε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με αυτό:

1. Ο αριθμός $\binom{n}{k}$ ονομάζεται συνδυασμοί n ανά k ή πιο απλά n ανά k.
2. Αν και ίσως να μην είναι ξεκάθαρο από τον ορισμό του, όμως μιας και οι συνδυασμοί n ανά k μετράνε ένα πλήθος στοιχείων, παίρνουμε ότι $\binom{k}{n} \in \mathbf{Z}$.
3. Αν $k > n$, τότε ορίζουμε $\binom{n}{k} = 0$.

Η απόδειξη

Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των μη-διατεταγμένων k-δων με διαφορετικά στοιχεία του $[n]$. Γνωρίζουμε ότι οι διαφορετικές διατεταγμένες k-δες είναι $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Όμως, όπως επίσης γνωρίζουμε, κάθε μη-διατεταγμένη k-άδα αντιστοιχεί σε ακριβώς $k!$ διατεταγμένες, δηλαδή κάθε υποσύνολο του $[n]$ μεγέθους k έχει μετρηθεί ακριβώς $k!$ φορές. Καταλήγουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Μερικές ιδιότητες

Πρόταση

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *(Ταυτότητα του Pascal).*
- $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ *(Διωνυμικό θεώρημα).*

Η απόδειξη του πρώτου στοιχείου είναι άμεση. Για το δεύτερο παρατηρούμε:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Απόδειξη

Για το τρίτο στοιχείο, παρατηρούμε ότι, για $n = 1$ η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ (ΕΥ). Για $n+1$, έχουμε

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) \overset{\text{ΕΥ}}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n+1-i} y^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1}$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] x^{n+1-i} y^i$$

$$\overset{\text{Pascal}}{=} x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i.$$

Μια εφαρμογή

Πόρισμα

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Το πρώτο μέρος προκύπτει άμεσα από το διωνυμικό θεώρημα, αν θεωρήσουμε $x = y = 1$.

Για το δεύτερο, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ (ΕΥ). Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = (n+1)2^n.$$

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} \overset{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} k\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} \\
&\overset{\text{EY}}{=} n\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2n\cdot 2^{n-1} + 2^n \\
&= (n+1)2^n.
\end{aligned}
$$

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί ένα k-μελές συμβούλιο ενός συλλόγου, με μέλη επιλεγμένα μέσα από n ανδρόγυνα, αν:

1. *Πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον r γυναίκες.*
2. *Πρέπει να περιλαμβάνει ακριβώς r γυναίκες.*
3. *Δεν μπορεί να περιλαμβάνει δύο συζήγους.*
4. *Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.*

Καταρχάς παρατηρούμε ότι συνολικά έχουμε $2n$ το πλήθος άτομα, από τα οποία ακριβώς τα n είναι γυναίκες και τα n είναι άντρες.

Ένα παράδειγμα

1. Παρατηρούμε ότι από την εκφώνηση μπορούμε να έχουμε από r έως και n γυναίκες στο συμβούλιο. Με άλλα λόγια, έχουμε $r + i$ γυναικείες θέσεις και $k - r - i$ αντρικές θέσεις, με $0 \leq i \leq n - r$. Για κάθε i, οι γυναικείες θέσεις καλύπτονται με $\binom{n}{r+i}$ τρόπους και οι αντρικές με $\binom{n}{k-r-i}$ τρόπους, άρα από την αρχή του πολλαπλασιασμού, έχουμε $\binom{n}{r+i}\binom{n}{k-r-i}$ τρόπους. Καταλήγουμε ότι συνολικά έχουμε $\sum_{i=0}^{n-r} \binom{n}{r+i}\binom{n}{k-r-i}$ τρόπους.
2. Για τις r αμιγώς γυναικείες θέσεις, όπως και πριν, έχουμε $\binom{n}{r}$ τρόπους. Για τις υπόλοιπες $k - r$ θέσεις, θα πρέπει να διαλέξουμε από τους n άντρες, δηλαδή έχουμε $\binom{n}{k-r}$ τρόπους. Από την αρχή του πολλαπλασιασμού, έχουμε συνολικά $\binom{n}{r}\binom{n}{k-r}$ τρόπους.

Ένα παράδειγμα

3. Καταρχάς θα σκεφτούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τα ανδρόγυνα, που ο ένας εκ των δύο θα βρεθεί στο συμβούλιο. Εφόσον έχουμε n ανδρόγυνα και k συμβούλους, έχουμε $\binom{n}{k}$ τέτοιους τρόπους. Κάθε ένα από τα k ανδρόγυνα που επιλέχθηκε έχει 2 τρόπους επιλογής (άνδρας ή γυναίκα). Έτσι, συνολικά έχουμε
$$\binom{n}{k} \cdot \underbrace{2 \cdots 2}_{k \text{ φορές}} = \binom{n}{k} \cdot 2^k$$
τρόπους.
4. Εδώ απλά επιλέγουμε k άτομα ανάμεσα από $2n$ άτομα. Επομένως η απάντηση είναι $\binom{2n}{k}$.

Ένα ακόμα παράδειγμα

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $n\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k}$.

$$(k+1)\binom{n}{k+1}+k\binom{n}{k} = (k+1)\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{n!k}{k!(n-k)!}$$

$$n \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \binom{n}{k}.$$

Ένα τελευταίο (για σήμερα) παράδειγμα

Παράδειγμα

Ποσα ορθογώνια υπάρχουν σε μια 8×8 σκακιέρα, αν οι πλευρές των ορθογωνίων πρέπει να ταυτίζονται με τις πλευρές τετραγώνων της σκακιέρας;

Κάθε τέτοιο ορθογώνιο ορίζεται μονοσήμαντα ως η τομή μιας κάθετης και μιας οριζόντιας ”λωρίδας” στην σκακιέρα. Κάθε μια από αυτές τις λωρίδες, ορίζεται μονοσήμαντα από ένα υποσύνολο μεγέθους 2 του $\{0, 1, \ldots, 8\}$, που οριοθετεί τα άκρα του. Για κάθε ένα από αυτά τα δισύνολα μπορούν να επιλεχθούν με $\binom{9}{2}$ τρόπους. Καταλήγουμε ότι έχουμε συνολικά

$$\binom{9}{2}^2$$

τέτοια ορθογώνια.

Bonus! - Το πρόβλημα των στρατηγών

Έστω ότι n στρατηγοί τοποθετούν απόρρητα σχέδια σε ένα γραμματοκιβώτιο. Το γραμματοκιβώτιο δέχεται απεριόριστο πλήθος λουκέτων και για να ανοίξει θα πρέπει να ξεκλειδώσουν όλα τα λουκέτα που έχει. Βρείτε ένα τρόπο διαμερισμού λουκέτων και κλειδιών (για κάθε λουκέτο, μπορούν να πάρουν κλειδιά πολλοί στρατηγοί), ώστε το γραμματοκιβώτιο να ανοίγει μόνο αν τουλάχιστον οι μισοί στρατηγοί είναι παρόντες. Πόσα κλειδιά και πόσα λουκέτα χρειαζόμαστε;