MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

3η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 08/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ενισχυση Προτασης

Μερικά Παραδείγματα

Μερικές φορές ενδέχεται να μην είναι εύκολη η απευθείας απόδειξη της ζητούμενης πρότασης, αλλά να είναι πιο εύκολο να αποδείξουμε μια ισχυρότερη πρόταση, όπως θα δούμε στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι ο αριθμός $S_n := 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ *είναι τέλειο τετράγωνο για* $n \geq 1$.

Εδώ η πρώτη μας σκέψη είναι να εργαστούμε με επαγωγή, οπότε ας το προσπαθήσουμε:

- Για $n = 1$ η πρόταση είναι προφανής.
- Έστω ότι $S_n = x^2$ για κάποιο x.
- Τότε

$$S_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \stackrel{\text{ΕΥ}}{=} x^2 + (2n+1).$$

Μερικά Παραδείγματα

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το τελευταίο δεν είναι απαραίτητα τετράγωνο (π.χ. αν $x = 2$ και $n = 1$). Όμως αν υπολογίσουμε τις πρώτες τιμές του S_n ίσως παρατηρήσουμε κάτι...

$$S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 = 9,\ S_4 = 16 \ldots$$

Με μια προσεκτική ματιά υποψιαζόμαστε ότι στην πράξη $S_n = n^2$, που φυσικά εμπεριέχει την προς απόδειξη πρόταση, οπότε προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $S_n = n^2$, για $n \geq 1$.

Μερικά Παραδείγματα

- Για $n = 1$, ισχύει.
- Έστω ότι $S_n = n^2$.
- Για $n + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \\ &\overset{\text{ΕΥ}}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $(1+x)^n \geq nx$ *αν* $x \in \mathbf{R}, x \geq -1$ *και* $n \geq 1$.

Ξεκινάμε με επαγωγή στο n.

- Για $n = 1$ ισχύει.
- Έστω ότι $(1+x)^n \geq nx$.
- Τότε
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{\text{ΕΥ}}{\geq} nx(x+1).$$
Όμως εύκολα βλέπουμε ότι αν $x > n$, το τελευταίο είναι μεγαλύτερο από την ποσότητα $(n+1)x$, άρα δεν μπορούμε να έχουμε το αποτέλεσμά μας.

Μερικά Παραδείγματα

Μετά από μερικές δοκιμές, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην πράξη δείχνει να ισχύει η (ισχυρότερη) πρόταση $(1+x)^n \geq nx + 1$ αν $x \in \mathbf{R}, x \geq -1$ και $n \geq 1$.

- Για $n = 1$, ισχύει.
- Έστω ότι $(1+x)^n \geq nx + 1$.
- Τότε

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{\text{ΕΥ}}{\geq} (nx+1)(x+1) \\ &= nx^2 + (n+1)x + 1 \geq (n+1)x + 1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως ανισότητα Bernoulli.

Το Θεώρημα του Γάμου (Hall, 1935)

Σύστημα ξένων αντιπροσώπων

Ορισμός

Έστω X ένα σύνολο (πεπερασμένο ή άπειρο). Το $A_1, \ldots, A_n$ είναι ένα σύστημα υποσυνόλων του X αν $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ και A_i πεπερασμένο για κάθε i.

Ορισμός

Έστω $A_1, \ldots, A_n$ ένα σύστημα υποσυνόλων του συνόλου X. Τα στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται σύστημα ξένων αντιπροσώπων (ΣΞΑ) για το σύστημα υποσυνόλων $A_1, \ldots, A_n$, αν $x_i \in A_i$ και $x_i \neq x_j$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και $i \neq j$.

Ερώτημα

Πότε ένα σύστημα υποσυνόλων έχει κάποιο σύστημα ξένων αντιπροσώπων;

Το πρόβλημα του Γάμου

Έστω ότι έχουμε κάποιες γυναίκες $\Gamma := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ και κάποιους άνδρες $A := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Στόχος μας είναι να ελέγξουμε κατά πόσο μπορούμε να αποκαταστήσουμε όλες τις γυναίκες (δεν μας ενδιαφέρει αν θα μείνουν κάποιοι άνδρες *στο ράφι*!), με τους εξής κανόνες:

1. Κάθε γυναίκα θα παντρευτεί έναν άντρα της αποδοχής της.
2. Κάθε άνδρας θα παντρευτεί μέχρι μια γυναίκα.

Έστω $A_i := \{\alpha \in A \ : \ \text{ο } \alpha \text{ αρέσει στην } \gamma_i\}$. Είναι ξεκάθαρο ότι το $A_1, \ldots, A_n$ είναι ένα σύστημα υποσυνόλων του A και αναρωτιόμαστε κατά πόσο το σύστημα αυτό έχει ένα ΣΞΑ.

Η συνθήκη του Hall

Έστω $A_1, \dots, A_n$ είναι ένα σύστημα υποσυνόλων κάποιου συνόλου. Αν $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, ορίζουμε

$$A(J) := \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Αν για κάθε $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, έχουμε ότι $|A(J)| \geq |J|$, τότε λέμε ότι το $A_1, \dots, A_n$ ικανοποιεί την συνθήκη του Hall.

Παράδειγμα

- *Αν $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ και $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, τότε το A_1, A_2 ικανοποιεί την συνθήκη του Hall.*
- *Αν $A_1 = \{\alpha_1\}$, $A_2 = \{\alpha_2\}$ και $A_3 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, τότε το A_1, A_2, A_3 δεν ικανοποιεί την συνθήκη του Hall.*

Το θεώρημα του γάμου

Θεώρημα (Hall, 1935)

Ένα σύστημα υποσυνόλων $A_1, \ldots, A_n$ ενός συνόλου A έχει σύστημα ξένων αντιπροσώπων αν και μόνο αν ικανοποιεί την συνθήκη του Hall.

Το ευθύ της πρότασης είναι άμεσο, επομένως επικεντρωνόμαστε στο αντίστροφο. Θα εργαστούμε με ισχυρή επαγωγή στο n.

- Η πρόταση είναι προφανής για $n = 1$.
- Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $k \leq n - 1$.

Το θεώρημα του γάμου

Έστω ότι $A_1, \ldots, A_n$ σύστημα υποσυνόλων του A που ικανοποιεί την συνθήκη του Hall. Θα ονομάζουμε ένα $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ κρίσιμο, αν $J \neq \emptyset, \{1, \ldots n\}$ και $|A(J)| = |J|$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

<u>Δεν υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο:</u>

Από την συνθήκη του Hall, $A_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha_1 \in A_1$. Θεωρούμε το σύστημα υποσυνόλων $A'_2, \ldots, A'_n$ του $A' := A \setminus \{\alpha_1\}$, όπου $A'_i := A_i \setminus \{\alpha_1\}$. Έστω $J \subseteq \{2, \ldots, n\}$. Αφού το J δεν είναι κρίσιμο (για το πρώτο σύστημα υποσυνόλων), έχουμε

$$|A'(J)| \geq |A(J)| - 1 > |J| - 1 \Rightarrow |A'(J)| \geq |J|.$$

Επομένως ικανοποιείται η συνθήκη του Hall για το $A'_2, \ldots, A'_n$ και από την ΕΥ, έχει ΣΞΑ. Αν $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ένα τέτοιο, καταλήγουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ΣΞΑ για το αρχικό σύστημα υποσυνόλων.

Το θεώρημα του γάμου

Υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο:

Έστω J ένα κρίσιμο σύνολο με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Χβγ υποθέτω ότι $J = \{1, \ldots, k\}$, οπότε $|A(J)| = |J| = k$. Αφού η συνθήκη του Hall ισχύει για το αρχικό σύστημα υποσυνόλων, είναι ξεκάθαρο ότι θα ισχύει και για το $A_1, \ldots, A_k$. Επομένως, από την ΕΥ, θα υπάρχει κάποιο $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ΣΞΑ για αυτό το σύστημα υποσυνόλων. Καταλήγουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ΣΞΑ για το σύστημα υποσυνόλων $A_{k+1}, \ldots, A_n$, τέτοιο ώστε οι αντιπρόσωποι να μην ανήκουν στο $A(J)$.

Από την ΕΥ, παίρνουμε δηλαδή ότι αρκεί νδό ισχύει η συνθήκη του Hall για το σύστημα υποσυνόλων $A'_{k+1}, \ldots, A'_n$, όπου $A'_i = A_i \setminus A(J)$ για $k + 1 \leq i \leq n$.

Το θεώρημα του γάμου

Έστω λοιπόν $I \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$. Αρκεί νδό $|A'(I)| \geq |I|$. Από την συνθήκη του Hall για το $A_1, \ldots, A_n$, έχουμε ότι

$$|A(I \cup J)| \geq |I \cup J| = |I| + |J|,$$

επειδή η ένωση είναι ξένη. Επιπλέον, εξ' ορισμού $A(I \cup J) = A'(I) \cup A(J)$ και η ένωση είναι επίσης ξένη. Οπότε παίρνουμε:

$$|A'(I)| = |A(I \cup J)| - |A(J)| \geq |I| + |J| - |J| = |I|.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος του γάμου είναι πλέον πλήρης!

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Έστω ότι $2m$ ομάδες μπάσκετ συμμετέχουν σε ένα πρωτάθλημα, όπου μέσα σε $2m - 1$ ημέρες κάθε ομάδα αντιμετωπίζει κάθε άλλη ομάδα ακριβώς μια φορά. Δείξτε ότι κάθε μέρα του πρωταθλήματος, μπορεί να διαλεχτεί ο "νικητής της ημέρας", έτσι ώστε ο τίτλος να δίνεται πάντα σε μια ομάδα που είναι νικήτρια την αντίστοιχη ημέρα και κάθε ομάδα να πάρει τον τίτλο το πολύ μια φορά μέσα στο πρωτάθλημα.

Παρατήρηση

Στο μπάσκετ δεν υπάρχει ισοπαλία, σε κάθε αγώνα θα ανακηρύσσεται κάποιος νικητής.

Ένα παράδειγμα

Σύμφωνα με το θεώρημα του γάμου, αρκεί νδό αν $1 \leq n \leq 2m - 1$, τότε μέσα σε n μέρες του πρωταθλήματος, μπορώ να βρω n (διαφορετικές) ομάδες που να έχουν κάποια νίκη σε αυτές τις μέρες.

Έστω ότι δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ομάδα που έχασε και στους n αγώνες της. Όμως, εφόσον σε κάθε έναν από αυτούς τους αγώνες έπαιξε με διαφορετικό αντίπαλο και εφόσον όλοι αυτοί οι αντίπαλοι κέρδισαν τουλάχιστον έναν αγώνα, τότε εύκολα βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε άτοπο.

Το ζητούμενο έπεται.

Μένουμε Ασφαλείς!