Τελική εξέταση-Βασικές ερωτήσεις/ασκήσεις

(Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

1. Έστω f ακέραια συνάρτηση και (R_n) μη-φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε
$$\sup_{|z|\leq R_n} |f(z)| \leq 1 + {R_n}^{2/3}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$
Τι συμπέρασμα βγάζετε για την f;

2. Βρείτε όλες τις ακέραιες συναρτήσεις f με την ιδιότητα
$$f^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_{|z|=1/2} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz.$$

4. Βρείτε όλες τις ακέραιες συναρτήσεις f που ικανοποιούν την ανισότητα
$$|f(z)| \leq \min\{|f'(z)|, |e^{f(z)}|\} \ \text{για κάθε} \ z \in \mathbb{C}.$$

5. Έχει η συνάρτηση $\frac{z-1}{z-2}$ ολόμορφο κλάδο του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [1,2]$;

6. Έχει η συνάρτηση $(z-1)(z-2)$ ολόμορφο κλάδο του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [1,2]$;

7. Έστω f ολόμορφη στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ η οποία επεκείνεται συνεχώς στο σύνορο. Αν (a_n) είναι η ακολουθία των συντελεστών του αναπτύγματος $Taylor$ της f με κέντρο το 0 δείξτε ότι $a_n \to 0$.

8. Δίνεται f μερόμορφη στο $\mathbb{C}$ και θεωρούμε A το σύνολο των πόλων της f. Γιατί το A είναι αριθμήσιμο σύνολο;

9. Δίνεται ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων $f_n : D(0,1) \to D(0,1)$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(0,1)$ και το όριο $\lim_{n\to+\infty} n(f(1/n)-f(0))$ υπάρχει και είναι μη-μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Δείξτε ότι $f \in H(D(0,1))$ και ότι $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in D(0,1)$.

10. Αν (f_n) είναι ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0,r)$ ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0,r)$ σε κάποια συνάρτηση f, η οποία δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\partial D(z_0, r/2)$, είναι σωστό ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε το πλήθος ριζών των f_n, f_m, για $n,m \geq N$, είναι το ίδιο στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r/2)$;

11. Εξετάστε αν το σύνολο $\{f \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq 2} |f(z) - e^z| > 1\}$ είναι ανοιχτό στον $H(\mathbb{C})$.

12. Εξετάστε αν το σύνολο $D(0,1) \setminus (-1,0]$ είναι απλά συνεκτικός τόπος.

13. Είναι σωστή η ακόλουθη πρόταση; Αν $f \in H(D(0,1))$ και (z_n) ακολουθία στο $D(0,1)$ με $z_n \neq z_m$ για $n \neq m$ ώστε $f(z_n) = 0$ για κάθε n τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

14. Είναι η οικογένεια

$$\mathcal{F} = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n \in H(D(0,1)) : |a_n(f)| \leq 2 \ \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

φυσιολογική;

15. Έστω $f \in H(D(0,1))$. Είναι σωστό ότι η συνάρτηση $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη στο $D(0,1)$;

16. Βρείτε μια αμφιολόμορφη απεικόνιση από τον δίσκο $D(0,2)$ επί του χωρίου $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$.

17. Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε

$$\sup_{|z| \leq 1} |p_n(z)| \to 0$$

και

$$\sup_{|z-n| \leq \frac{n}{2}} |p_n(z) - e^{nz}| \to 0;$$