2ο σετ Προβλημάτων

(Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

1. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε περιοχή του κλειστού δίσκου $|z| \leq 1$ εκτός από ένα σημείο z_0, με $|z_0| = 1$, το οποίο είναι πόλος της f. Αν (a_n) είναι η ακολουθία των συντελεστών στο ανάπτυγμα της f ως δυναμοσειρά με κέντρο το 0, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

2. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε περιοχή του κλειστού δίσκου $|z| \leq 1$ και $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε z με $|z| = 1$, δηλαδή η f παίρνει πραγματικές τιμές στη μοναδιαία περιφέρεια. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3. (Παραλλαγή του Θεωρήματος **Morera**.) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ ώστε
$$\int_C f(z)dz = 0$$
για κάθε κύκλο C. Δείξτε ότι η f είναι ακέραια.

4. Έστω $\lambda > 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση
$$ze^{\lambda - z} = 1$$
έχει ακριβώς μία ρίζα στον κλειστό δίσκο $|z| \leq 1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι αυτή η ρίζα είναι πραγματική και θετική.

5. Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ τόπος και f, g ολόμορφες συναρτήσεις στο Ω ώστε
$$|f(z)| + |g(z)| = c \quad \text{για κάθε} \quad z \in \Omega,$$
όπου c είναι θετική σταθερά. Δείξτε ότι οι f, g είναι σταθερές συναρτήσεις στο Ω.

6. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $D(0,1) \setminus \{0\}$ και c θετική σταθερά ώστε
$$|f(z)| \leq c|z|^{-1+\epsilon}$$
για κάποιο $\epsilon > 0$ (όχι κατάνάγκη μικρό) και για κάθε z 'κοντά' στο 0 ($z \neq 0$). Δείξτε ότι η ιδιομορφία της f στο 0 είναι αιρόμενη.