1ο σετ Προβλημάτων

(Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

1. Έστω f ολόμορφη σε περιοχή του κλειστού δίσκου $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, όπου $R > 0$. Δείξτε ότι
$$\frac{R^2 - |z|^2}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \overline{z}\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{R^2 - \overline{z}\zeta} \right] f(\zeta) d\zeta = f(z),$$
για $|z| < R$. Εισάγοντας πολικές συντεταγμένες, $z = re^{i\phi}$, $\zeta = Re^{i\theta}$, δείξτε ότι η παραπάνω ισότητα γράφεται ως
$$f(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta. \tag{1}$$
Η σχέση (1) λέγεται **τύπος Poisson**.

2. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε περιοχή του κλειστού δίσκου $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ με $f(0) = 1$.

   (i) Κάνοντας χρήση των ολοκληρωμάτων
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[2 - \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} dz,$$
   δείξτε ότι
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2 + f'(0), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2 - f'(0).$$

   (ii) Δείξτε το ακόλουθο: αν η f ικανοποιεί επιπλέον ότι $Ref(z) \geq 0$ για κάθε z με $|z| \leq 1$ τότε $-2 \leq Ref'(0) \leq 2$.

3. Δείξτε ότι
$$\left(\frac{z^n}{n!} \right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^n e^{z\zeta}}{n! \zeta^{n+1}} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$
όπου γ είναι κατά τμήματα C^1 απλή κλειστή καμπύλη ώστε το 0 δεν ανήκει στην εικόνα της καμπύλης και ο δείκτης στροφής του 0 ως προς την καμπύλη γ είναι 1. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (2) δείξτε ότι
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2z\cos\theta} d\theta.$$

4. Με H^{∞} συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ολομόρφων και φραγμένων συναρτήσεων στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Δηλαδή,

$$f \in H^{\infty} \text{ αν } f \in H(D(0,1)) \text{ και } \sup_{|z|<1} |f(z)| < +\infty.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $f \in H^{\infty}$ ώστε $f' \notin H^{\infty}$.

5. Έστω f, g ολόμορφες συναρτήσεις σε περιοχή του κλειστού μοναδιαίου δίσκου $|z| \leq 1$. Υποθέτουμε ότι η f έχει απλή ρίζα στο 0 και δεν μηδενίζεται πουθενά αλλού στον δίσκο $|z| \leq 1$. Ορίζουμε

$$f_{\lambda}(z) = f(z) + \lambda g(z).$$

Δείξτε ότι αν το λ είναι αρκετά μικρό τότε

   (i) η f_{λ} έχει μοναδική ρίζα στον δίσκο $|z| \leq 1$ και

   (ii) αν z_{λ} είναι αυτή η ρίζα, η απεικόνιση $\lambda \to z_{\lambda}$ είναι συνεχής.