Φυλλάδιο Ασκήσεων-Παραλλαγές και εφαρμογές του Θεωρήματος Phragmen – Lindelof

(Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

1. Έστω f ολόμορφη στο δεξί ημιεπίπεδο $H = \{z : Rez > 0\}$ η οποία επεκτείνεται συνεχώς στο σύνορο του H. Υποθέτουμε ότι $|f(iy)| \leq 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και
$$|f(z)| \leq Ce^{c|z|^\gamma} \text{ για κάθε } z \in H,$$
όπου c, C, γ θετικές σταθερές (ανεξάρτητες του z) με $\gamma < 1$. Δείξτε ότι $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in H$. Ισχύει το συμπέρασμα για $\gamma = 1$;

2. (**Γενίκευση της (προηγούμενης) άσκησης 1**.) Έστω S το εσωτερικό κυρτής γωνίας με κορυφή στο 0 και άνοιγμα π/β. Έστω f ολόμορφη στο S και συνεχής στην κλειστότητα $\overline{S}$ του S έτσι ώστε
$$|f(z)| \leq 1 \text{ για κάθε } z \in \partial S$$
και
$$|f(z)| \leq Ce^{c|z|^\alpha} \text{ για κάθε } z \in S,$$
όπου c, C, α θετικές σταθερές (ανεξάρτητες του z) με $\alpha < \beta$. Δείξτε ότι $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in S$.

3. (**Ένα θεώρημα κυρτότητας**.) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και f ολόμορφη και φραγμένη σε ανοιχτή περιοχή της λωρίδας $\{z = x + iy : a \leq x \leq b\}$. Για κάθε $x \in [a, b]$ ορίζουμε
$$M(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|.$$
Δείξτε ότι η συνάρτηση $\log M(x)$ είναι κυρτή συνάρτηση του x. (Υπόδειξη: κοιτάξτε τη συνάρτηση $h(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)} M(b)^{(z-a)/(b-a)}$.)

4. (**Το θεώρημα των τριών κύκλων του Hadamard.**) Έστω f ολόμορφη σε περιοχή του κλειστού δακτυλίου $\{z : a \leq |z| \leq b\}$, όπου $0 < a < b$. Για κάθε $r \in [a, b]$ ορίζουμε
$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\log M(r)$ είναι κυρτή συνάρτηση του $\log r$, δηλαδή για κάθε $r \in [a, b]$ έχουμε

$$\log(b/a) \log M(r) \leq \log(b/r) \log M(a) + \log(r/a) \log M(b).$$

(Υπόδειξη: εφαρμόστε την άσκηση 3 για τη συνάρτηση $g(z) = f(e^z)$.)