Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εφαρμογές του Λήμματος Schwarz

(Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

Σημείωση: με $\mathbb{D}$ θα συμβολίζουμε τον ανοιχτό δίσκο κέντρου 0 και α-κτίνας 1.

1. Έστω f ολόμορφη και φραγμένη συνάρτηση στον ανοιχτό δίσκο $D(0, R)$. Άρα υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in D(0, R)$. Δείξτε ότι
$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leq \frac{|z|}{MR}, \text{ για κάθε } z \in D(0, R).$$

2. Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη συνάρτηση η οποία έχει δύο σταθερά σημεία $a, b,\ a \neq b$, δηλαδή $f(a) = a,\ f(b) = b$. Δείξτε ότι $f(z) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.

3. Είναι σωστό ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ έχει σταθερό σημείο;

4. Η **ψευδο-υπερβολική απόσταση** μεταξύ δύο σημείων $z, w \in \mathbb{D}$ ορίζεται ως εξής:
$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|.$$
Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w) \text{ για κάθε } z, w \in \mathbb{D}.$$
Αν επιπλέον η f είναι αυτομορφισμός του δίσκου $\mathbb{D}$ δείξτε ότι η f διατηρεί την ψευδο-υπερβολική απόσταση, δηλαδή:
$$\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w) \text{ για κάθε } z, w \in \mathbb{D}.$$
(Υπόδειξη: θεωρείστε τον αυτομορφισμό $\phi_a(z) = (z - a)/(1 - \overline{a} z)$ και εφαρμόστε το Λήμμα του *Schwarz* στη συνάρτηση $\phi_{f(a)} \circ f \circ \phi_a^{-1}$.)

5. (Λήμμα **Schwarz – Pick**). Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{D}.$$