ΜΕΜ241 - Διακριτα Μαθηματικα

2η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 02/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Μπρος-Πισω Επαγωγη

Τα βήματα

Μια πιο εξεζητημένη εκδοχή της επαγωγής είναι η μπρος-πίσω επαγωγή. Εδώ ουσιαστικά αντί να κάνουμε ένα-ένα βήμα μπροστά κάνουμε μεγάλα ”άλματα” μπροστά και μετά δείχνουμε ότι μπορούμε να καλύψουμε τα κενά που αφήσαμε.

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $P(n), \forall n \geq n_0$, δείχνουμε ότι:

- $P(n_0)$ (αρχική περίπτωση).
- $P(n) \Rightarrow P(k)$, όπου $n_0 \leq n < k$.
- $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ για $n > n_0$.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι αν $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, *(*$n \geq 1$*), τότε*

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Για $n = 1$ η πρόταση είναι προφανής. Για $n = 2$, έχουμε:

$$(a_1 a_2)^{1/2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \iff a_1 a_2 \leq \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2}{4}$$
$$4a_1 a_2 \leq a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \iff 0 \leq (a_1 - a_2)^2,$$

που ισχύει πάντα.

Έστω ότι για n και για κάθε $a_1, \ldots, a_n \geq 0$,

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ένα παράδειγμα

Για $2n$ θέτουμε:

$$\begin{aligned} A &:= \tfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n), & a &:= (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \\ B &:= \tfrac{1}{n}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}), & b &:= (a_{n+1} \cdots a_{2n})^{1/n}. \end{aligned}$$

Από την ΕΥ, $A \geq a$ και $B \geq b$, επομένως

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} = \frac{A + B}{2} \geq \frac{a + b}{2} \overset{n=2}{\geq} (ab)^{1/2} = (a_1 \cdots a_{2n})^{1/2n}.$$

Έχουμε μέχρι στιγμής δείξει ότι μπορούμε να κάνουμε ”άλματα”. Μένει να δείξουμε ότι μπορούμε να πάμε και προς τα πίσω!

Ένα παράδειγμα

Έστω λοιπόν ότι ισχύει η προηγούμενη ΕΥ. Θα δείξουμε την πρόταση για $n-1$.

Παίρνουμε $a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 0$. Θέτω $a_n = \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Από την ΕΥ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \\
(a_1 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \\
(a_1 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \frac{(n-1)(a_1 + \cdots + a_{n-1}) + (a_1 + \cdots + a_{n-1})}{n(n-1)} \\
(a_1 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \frac{n(a_1 + \cdots + a_{n-1})}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Ένα παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)^{1/n} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = a_n \\
a_1 \cdots a_{n-1} a_n &\leq a_n^n \\
a_1 \cdots a_{n-1} &\leq a_n^{n-1} \\
a_1 \cdots a_{n-1} &\leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \\
(a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Φωλιασμενη Επαγωγη

Ένα παράδειγμα

Με τον όρο φωλιασμένη επαγωγή εννοούμε εκείνες τις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούμε επαγωγή για να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα μιας άλλης επαγωγής.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $24 \mid 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5, \forall n \geq 1$.

- Η πρόταση είναι αληθής για $n = 1$.
- Έστω ότι $24 \mid 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 \iff 3 \cdot 5^n = 24\ell - 2 \cdot 7^n + 5$.
- Για $n+1$, έχουμε

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 14 \cdot 7^n + 5 \cdot 3 \cdot 5^n - 5 \\ &\overset{\text{ΕΥ}}{=} 14 \cdot 7^n + 5(24\ell - 2 \cdot 7^n + 5) - 5 \\ &= 4(7^n + 5) + 24 \cdot 5\ell. \end{aligned}$$

Ένα παράδειγμα

Το τελευταίο διαιρείται από το 24 αν και μόνο αν $6 \mid 7^n + 5$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια δεύτερη (φωλιασμένη) επαγωγή για να δείξουμε ότι $6 \mid 7^n + 5$ για κάθε $n \geq 0$.

- Για $n = 0$ ισχύει.
- Έστω ότι $6 \mid 7^n + 5 \iff 7^n + 5 = 6m \iff 7^n = 6m - 5$.
- Τότε έχουμε

  $$7^{n+1}+5 = 7 \cdot 7^n + 5 \overset{\text{ΕΥ}}{=} 7(6m-5)+5 = 6 \cdot 7m - 30 = 6(7m-5).$$

  Επομένως $6 \mid 7^{n+1} + 5$.

Πολλαπλη Επαγωγη

Τα βήματα

Εάν η πρότασή μας έχει περισσότερες από μια ακέραιες μεταβλητές, τότε, ανάλογα με το πρόβλημα, θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα σύστημα επαγωγών που θα καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, αν θέλω να δείξω ότι $P(m,n)$, $\forall\, m \geq m_0, n \geq n_0$, μπορώ να δείξω τα εξής:

- $P(m_0, n_0)$
- $P(m,n) \Rightarrow P(m+1,n)$
- $\forall\, m \geq m_0, k < n$, $P(m,k) \Rightarrow P(0,n)$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση Ackermann ορίζεται αναδρομικά σύμφωνα με τους εξής αναδρομικούς τύπους για κάθε $m, n \geq 0$.

- $A(0, n) = n + 1$,
- $A(m + 1, 0) = A(m, 1)$,
- $A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση Ackermann μπορεί να υπολογιστεί μετά από πεπερασμένο αριθμό πράξεων για κάθε $m, n \geq 0$.

Ένα παράδειγμα

Για λόγους συντομίας, θα γράφουμε ”υπολογίζεται” και θα εννοούμε ότι υπολογίζεται μετά από πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

- Η πρότασή μας ισχύει για $m = 0$.
- Έστω ότι η πρότασή μας ισχύει για κάποιο m, δηλαδή το $A(m, n)$ υπολογίζεται για κάθε $n \geq 0$.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $m + 1$, δηλαδή ότι το $A(m + 1, n)$ υπολογίζεται για κάθε $n \geq 0$.
  - Για $n = 0$, $A(m + 1, 0) = A(m, 1)$, που υπολογίζεται σύμφωνα με την ΕΥ.
  - Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή το $A(m + 1, n)$ υπολογίζεται.
  - Για τον $n + 1$ έχουμε, $A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$. Σύμφωνα με την ΕΥ, το $A(m + 1, n)$ υπολογίζεται: έστω λοιπόν ότι υπολογίζουμε $A(m + 1, n) = k$. Τότε $A(m + 1, n + 1) = A(m, k)$, που υπολογίζεται σύμφωνα με την ΕΥ.

Μένουμε Ασφαλείς!