3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

Σημείωση: όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ που εμφανίζονται παρακάτω θεωρούνται πάντοτε μη-κενά.

Οι πρώτες 6 ασκήσεις σχετίζονται με τον δείκτη στροφής.

1. (**Ο δείκτης στροφής για περιφέρειες δίσκων**). Δίνονται $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{z : |z-a| = r\}$ ορίζουμε
$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$
Χρησιμοποιήστε το σχετικό θεώρημα για τον δείκτη στροφής και δείξτε ότι $I(z) = 1$ αν $|z-a| < r$ και $I(z) = 0$ αν $|z-a| > r$. Σημειώνουμε ότι η καμπύλη $\{z : |z-a| = r\}$ λαμβάνεται με τον θετικό προσανατολισμό και 'διαγράφεται' μία φορά. (Για έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του παραπάνω δείκτη στροφής δείτε την άσκηση 9 του 2ου φυλλαδίου ασκήσεων).

2. Δίνονται n θετικός ακέραιος, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{C}$ κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $0 \notin \gamma_j([a, b])$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(t) = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j(t)$, $t \in [a, b]$. Παρατηρήστε ότι η γ είναι κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $0 \notin \gamma_j([a, b])$ και δείξτε ότι
$$Ind_\gamma(0) = \sum_{j=1}^{n} Ind_{\gamma_j}(0).$$

3. Δίνεται (μιγαδικό) πολυώνυμο p βαθμού n, $n \geq 0$. Δείξτε ότι για κατάλληλα μεγάλο r έχουμε
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = n,$$
όπου $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, το οποίο θα αποδείξουμε αργότερα ως εφαρμογή του θεωρήματος *Liouville*).

4. Έστω γ κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη και f ολόμορφη συνάρτηση σε (ανοιχτή) περιοχή της εικόνας της καμπύλης γ^* ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

5. Δίνεται η κλειστή καμπύλη γ της οποίας το ίχνος είναι το σύνολο

$$[-r,r] \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \;\text{ και }\; Imz \geq 0\}$$

(δηλαδή το διάστημα $[-r,r]$ ένωση με το ημικύκλιο του κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας r που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο). Το ίχνος της καμπύλης διαγράφεται μία φορά και με τον θετικό προσανατολισμό. Δείξτε ότι $Ind_\gamma(z) = 1$ για κάθε $z \in D(0,r) \cap \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$.

6. Ορίζουμε $G := D(0,3) \setminus (D(1,1/2) \cup D(-1,1/2))$ και θεωρούμε τις καμπύλες γ_1, γ_2, γ_3 των οποίων τα ίχνη είναι $|z-1| = 1$, $|z+1| = 1$, $|z| = 2$ αντίστοιχα. Δώστε κατάλληλους προσανατολισμούς στις καμπύλες γ_1, γ_2, γ_3 ώστε

$$Ind_{\gamma_1}(z) + Ind_{\gamma_2}(z) + Ind_{\gamma_3}(z) = 0 \;\text{ για κάθε }\; z \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Οι επόμενες δύο ασκήσεις αφορούν στην κατασκευή ολομόρφων συναρτήσεων.

7. Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, γ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη στο Ω και $h : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$g(z) = \int_\gamma h(w,z)dw, \;\; z \in \Omega,$$

είναι συνεχής στο Ω. Αν επιπλέον υπάρχει η $\frac{\partial h}{\partial z}$ για κάθε $(w,z) \in \gamma^* \times \Omega$ και είναι συνεχής (στο $\gamma^* \times \Omega$) δείξτε ότι $g \in H(\Omega)$ και

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial z}(w,z)dw, \;\; z \in \Omega.$$

8. Έστω γ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και $h : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$g(z) := \int_\gamma \frac{h(z)}{w-z}dw, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{h(z)}{(w-z)^2}dw, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την άσκηση 7. Υπάρχει και άλλος τρόπος απόδειξης με χρήση δυναμοσειρών!)

Οι επόμενες ασκήσεις είναι υπολογιστικές και αποτελούν απλές εφαρμογές του ολοκληρωτικού τύπου του *Cauchy* (και της γενίκευσής του για κάθε τάξης παράγωγο).

9. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα (όπου μπορείτε κάνετε τον υπολογισμό με δύο τρόπους: με και χωρίς χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του *Cauchy*).

    (*i*) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

    (*ii*) $\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$, $\gamma(t) = a + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

    (*iii*) $\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n = 1, 2, \ldots$.

    (*iv*) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1/2)^n} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n = 1, 2, \ldots$.

    (*iv*) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1} dz$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

10. Για κάθε $r \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)},$$

    όπου $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.