ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

1η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 01/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Απλη Επαγωγη

Εισαγωγή

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης, που εξαρτάται από έναν ακέραιο αριθμό, για όλους τους ακέραιους $n \geq n_0$ για κάποιον $n_0 \in \mathbf{Z}$. Η πιο απλή και διαδεδομένη εκδοχή της είναι αυτή της απλής επαγωγής.

Αν P είναι η πρόταση αυτή, γράφουμε $P(n)$, αν η πρόταση αυτή είναι αληθής για τον ακέραιο n (επίσης γράφουμε $\neg P(n)$ αν η πρόταση είναι ψευδής για τον n). Έτσι αν ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι

$$\forall\, n \geq n_0 \ : \ P(n),$$

τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Τα βήματα

1. $P(n_0)$ (αρχική περίπτωση)
2. Για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(n)$ (επαγωγική υπόθεση - ΕΥ), τότε $P(n+1)$ (επαγωγικό βήμα).

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Δείξτε ότι για $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Λύση

Αρχική περίπτωση Παρατηρώ ότι για $n = 1$, το δεξί μέρος της σχέσης είναι 1 και το αριστερό είναι $\frac{1}{2}1 \cdot 2 = 1$, άρα η πρόταση ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση Έστω ότι $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Επαγωγικό βήμα Για $n+1$, έχω

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{\text{ΕΥ}} + (n+1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Μια σημαντική εφαρμογή

Αν X ένα σύνολο, τότε το δυναμοσύνολο του X είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα υποσύνολα του X και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(X)$ ή 2^X. Σε τυπική γλώσσα,

$$\mathcal{P}(X) := \{A \ : \ A \subseteq X\}$$

Παράδειγμα

Αν $X = \{1, 2\}$, *τότε* $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Μια σημαντική εφαρμογή

Θεώρημα

Αν $|X| = n$, τότε $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Αν $n = 0$, τότε $X = \emptyset$ και $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, επομένως η πρόταση ισχύει, καθώς $|\mathcal{P}(X)| = 2^0 = 1$.

Έστω ότι για κάθε σύνολο τάξης k, το δυναμοσύνολό του έχει τάξη 2^k (Ε.Υ.).

Αν $|X| = k + 1$, τότε παίρνουμε ένα $x \in X$ (παρητηρήστε ότι τέτοιο x υπάρχει) και θεωρούμε το σύνολο $X \setminus \{x\}$. Προφανώς $|X \setminus \{x\}| = k$, άρα από Ε.Υ., έχουμε ότι $|\mathcal{P}(X \setminus \{x\})| = 2^k$.

Τώρα ισχυριζόμαστε ότι

$$\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subseteq X \setminus \{x\}\} \cup \{A \cup \{x\} \ : \ A \subseteq X \setminus \{x\}\}$$

και μάλιστα ότι η παραπάνω ένωση είναι ξένη.

Μια σημαντική εφαρμογή

Πράγματι, αν $A \subseteq X$, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν $x \notin A \Rightarrow A \subseteq X \setminus \{x\}$.
- Αν $x \in A \Rightarrow A = B \cup \{x\}$, όπου $B = A \setminus \{x\}$ και $B \subseteq A \setminus \{x\}$.

Το γεγονός ότι η ένωση είναι ξένη είναι προφανές.

Έτσι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}(X)| &= |\{A \ : \ A \subseteq X \setminus \{x\}\}| + |\{A \cup \{x\} \ : \ A \subseteq X \setminus \{x\}\}| \\
&\overset{\text{ΕΥ}}{=} 2^k + 2^k = 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Ισχυρη Επαγωγη

Τα βήματα

Η διαφορά ανάμεσα στην απλή και την ισχυρή επαγωγή εντοπίζεται στο βήμα της επαγωγικής υπόθεσης. Πιο συγκεκριμένα, στην ισχυρή επαγωγή έχουμε τα βήματα:

1. $P(n_0)$ (αρχική περίπτωση)
2. Για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$ (επαγωγική υπόθεση - ΕΥ), τότε $P(n+1)$ (επαγωγικό βήμα).

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Δείξτε με την βοήθεια της επαγωγής ότι κάθε ακέραιος $n \geq 2$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Εφόσον ο 2 είναι πρώτος, η πρόταση είναι σωστή για $n = 2$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $2 \leq k \leq n$ (ΕΥ).

Αν ο $n + 1$ είναι πρώτος, τότε η πρόταση ισχύει και για $n + 1$. Έστω ότι ο $n + 1$ δεν είναι πρώτος. Τότε $\exists\, \kappa, \lambda$, τέτοιοι ώστε $n + 1 = \kappa\lambda$, όπου $2 \leq \kappa, \lambda \leq n$. Από την ΕΥ οι κ, λ γράφονται ως γινόμενο πρώτων. Καταλήγουμε ότι η πρόταση αληθεύει.

Ένα ακόμα παράδειγμα

Παράδειγμα

Αν $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ *και* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ *για* $n \geq 3$, *δείξτε ότι*

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Παρατηρούμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $2 \leq k \leq n$ (ΕΥ).

Για $n + 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2a_{n-1} \\ &\overset{\text{ΕΥ}}{=} 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n + 2(3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1}) \\ &= 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^{n-1}(-1 + 2) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Μένουμε Ασφαλείς!