2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

Σημείωση: όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ που εμφανίζονται παρακάτω θεωρούνται πάντοτε μη-κενά.

1. Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

   (i) Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0.

   (ii) Υπάρχουν $l \in \mathbb{C}$ και συνάρτηση $\epsilon(z)$ ορισμένη για z κοντά στο z_0 ώστε: $\epsilon(z) \to 0$ καθώς $z \to z_0$ και

   $$f(z) - f(z_0) = (l + \epsilon(z))(z - z_0), \text{ για } z \text{ κοντά στο } z_0.$$

   Παρατηρήστε ότι $l = f'(z_0)$.

   (iii) Υπάρχουν $l \in \mathbb{C}$ και συνάρτηση $g(z)$ ορισμένη σε περιοχή V του z_0 ώστε: g συνεχής στο z_0, $g(z_0) = 0$ και

   $$f(z) - f(z_0) = (l + g(z))(z - z_0), \text{ για } z \in V.$$

2. (**Ο κανόνας της αλυσίδας**). Δίνονται U, V ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$, συναρτήσεις $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in U$ ώστε η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 και η g έχει μιγαδική παράγωγο στο $f(z_0)$. Δείξτε ότι η $g \circ f$ έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 και

   $$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)f'(z_0).$$

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την άσκηση 1.)

3. (**1ος ορισμός της εκθετικής συνάρτησης**). Ορίζουμε την (μιγαδική) εκθετική συνάρτηση ως εξής:

   $$exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$$

   για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Ως γνωστόν, $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Δείξτε τα ακόλουθα.

   (i) Η συνάρτηση exp είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

   (ii) $exp'(z) = exp(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

   (iii) Η εκθετική συνάρτηση δεν είναι ρητή συνάρτηση του z.

(iv) $exp(z+w) = exp(z)exp(w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

   (i) Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (ii) Η f ικανοποιεί τις εξισώσεις *Cauchy-Riemann* στο 0.

   (iii) Η f δεν έχει μιγαδική παράγωγο στο 0.

   (Υπόδειξη: θεωρήστε τη συνάρτηση $f(z) = e^{-1/z^2}$ για $z \neq 0$ και $f(0) = 0$.)

5. Έστω Ω ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f \in H(\Omega)$ με $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \Omega$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

6. Με $\mathbb{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Έστω n θετικός ακέραιος. Δίνονται $z_1, \ldots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο με $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης 1 η οποία συγκλίνει σε κάθε $z \in \mathbb{T} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ και αποκλίνει σε κάθε z_j, $j = 1, \ldots, n$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (iii) της άσκησης 5 του 1ου Φυλλαδίου Ασκήσεων).

7. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{(n(n+1))}$$

   είναι ίση με 1 και στη συνέχεια εξετάστε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία 1, -1, i.

8. Για κάθε $r > 0$ ορίζουμε $G(r) = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$, όπου $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Δείξτε ότι $\lim_{r \to +\infty} G(r) = 0$.

9. (**Μια εισαγωγή στο δείκτη στροφής**). Δίνονται $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{z : |z - a| = r\}$ ορίζουμε

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

   Δείξτε ότι $I(z) = 1$ αν $|z - a| < r$ και $I(z) = 0$ αν $|z - a| > r$. Σημειώνουμε ότι η καμπύλη $\{z : |z - a| = r\}$ λαμβάνεται με τον θετικό προσανατολισμό και 'διαγράφεται' μία φορά. Ο ακέραιος αριθμός $I(z)$ για $z \in \mathbb{C} \setminus \{z : |z - a| = r\}$ λέγεται **δείκτης στροφής** της καμπύλης

$\{z : |z-a| = r\}$ ως προς το σημείο z. (Υπόδειξη: αν $|z-a| < r$ τότε για κάθε ζ με $|\zeta - a| = r$,

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$$

και δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \frac{\zeta-a}{\zeta-z} \text{ ομοιόμορφα για } \zeta \in \partial D(a,r).$$

Στη συνέχεια εκμεταλλευτείτε την ομοιόμορφη σύγκλιση για να περάσετε στο ζητούμενο ολοκλήρωμα και με έναν απλό υπολογισμό καταλήξτε στο ζητούμενο για $z \in D(a,r)$. Δουλέψτε με ανάλογο τρόπο για z έξω από τον κλειστό δίσκο $\overline{D(a,r)}$.)

10. Αν $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $|a| < |b|$ δείξτε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

όπου γ συμβολίζει τον κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας r με $|a| < r < |b|$. Σημειώνουμε ότι ο κύκλος λαμβάνεται με τον θετικό προσανατολισμό και ‘διαγράφεται’ μία φορά. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την άσκηση 9).