

UNIVERSITY OF CRETE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS  
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)  
LECTURER: G. KAPETANAKIS

4th exercise set

**Exercise 1.** Solve the following linear congruences:

1.  $137x \equiv 4 \pmod{102}$ .
2.  $7x \equiv 8 \pmod{30}$ .
3.  $24x \equiv 22 \pmod{33}$ .
4.  $2086x \equiv -1624 \pmod{1729}$ .

**Exercise 2.** A salesman is visiting a town every 5 months. Will he ever visit the town on March?

**Exercise 3.** Solve the following systems:

1. 
$$\begin{cases} 3x \equiv -1 \pmod{10} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{15} \\ x \equiv 7 \pmod{18} \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv -27 \pmod{22} \\ 3x \equiv 30 \pmod{39} \end{cases}$$

**Exercise 4 (Brahmagupta).** A basket is full of eggs. When the eggs are taken out of a basket 2, 3, 4, 5, 6, 7 at a time, the remainders are 1, 2, 3, 4, 5 and 0 respectively. How many eggs were in the basket?

**Exercise 5 (The Chinese Cook Problem).** In some looting, 17 pirates acquire a treasure of gold pieces. They decide to share the treasure and give the remainder to their Chinese cook. This way, the cook got 3 gold pieces. Later, at a naval battle, 6 of the pirates were killed and the remaining pirates decided to re-share the treasure in the same way. Now, the cook got 4 gold pieces. Later still, they had a shipwreck and only six of the original pirates (plus the cook) survived. They re-shared the treasure in the same way. Now, the Chinese cook got 5 gold pieces. While on shore, the cook poisoned the crew and got the whole treasure for himself. What is the minimum number of gold pieces that the Chinese cook has?

**Exercise 6.** On a 12-hour clock, we put a blue marble on position 1 and a red marble on position 2. Every hour we move the blue marble by 3 positions and the red marble by 1. Will the two marbles ever meet?

**Exercise 7.** Find a congruence equivalent with the system

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4}, \\ x \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

**Exercise 8.** Solve  $x^3 + 4x + 8 \equiv 0 \pmod{15}$ .

**Exercise 9.** Solve the following congruences:

1.  $121x^5 + x^2 - 24x + 143 \equiv 0 \pmod{11}$ .
2.  $3x^7 + 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ .
3.  $7x^7 + 16x^2 + 10 \equiv 0 \pmod{21}$ .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - MEM204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

4ο σετ ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Λύστε τις παρακάτω γραμμικές ισοτιμίες:

1.  $137x \equiv 4 \pmod{102}$ .
2.  $7x \equiv 8 \pmod{30}$ .
3.  $24x \equiv 22 \pmod{33}$ .
4.  $2086x \equiv -1624 \pmod{1729}$ .

**Άσκηση 2.** Ένας πωλητής επισκέπτεται μια πόλη κάθε 5 μήνες. Θα βρεθεί ποτέ στην πόλη αυτή μήνα Μάρτιο;

**Άσκηση 3.** Λύστε τα παρακάτω συστήματα:

1. 
$$\begin{cases} 3x \equiv -1 \pmod{10} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{15} \\ x \equiv 7 \pmod{18} \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv -27 \pmod{22} \\ 3x \equiv 30 \pmod{39} \end{cases}$$

**Άσκηση 4** (Brahmagupta). Ένα καλάθι περιέχει αυγά. Όταν παίρνουμε τα αυγά από το καλάθι ανά 2, 3, 4, 5, 6 και 7, τότε στο τέλος περισσεύουν αντίστοιχα 1, 2, 3, 4, 5 και 0 αυγά. Πόσα αυγά περιέχει το καλάθι;

**Άσκηση 5** (Το Πρόβλημα του Κινέζου Μάγαιρα). Σε κάποιο πλιάτσικο, 17 πειρατές αποκτούν έναν θησαυρό που αποτελείται από χρυσές λίρες. Αποφασίζουν να μοιραστούν σε ίσα μέρη τις λίρες και να δώσουν το υπόλοιπο στον Κινέζο μάγαιρα του πλοίου. Έτσι ο μάγαιρας πήρε 3 λίρες. Αργότερα, σε μια ναυμαχία, 6 πειρατές σκοτώθηκαν και οι εναπομείναντες αποφάσισαν να ξαναμοιραστούν τον θησαυρό με τον ίδιο τρόπο. Αυτή τη φορά ο μάγαιρας πήρε 4 λίρες. Μετά από λίγες μέρες, το πειρατικό πλοίο ναυάγησε και μόνο 6 από τους πειρατές (και ο μάγαιρας) επιβίωσαν. Ξαναμοίρασαν λοιπόν τον θησαυρό και αυτή τη φορά ο μάγαιρας πήρε 5 λίρες. Κατά την παραμονή τους στο νησί, ο μάγαιρας δηλητηρίασε όλους τους πειρατές, ώστε να κρατήσει ολόκληρο τον θησαυρό για τον εαυτό του. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος λιρών που έχει πλέον ο Κινέζος μάγαιρας;

**Άσκηση 6.** Σε ένα 12ωρο ρολόι, τοποθετούμε έναν μπλε βόλο στην θέση 1 και έναν κόκκινο βόλο στην θέση 2. Κάθε ώρα μετακινούμε τον μπλε βόλο κατά 3 θέσεις και τον κόκκινο βόλο κατά 1. Θα βρεθούν ποτέ οι δύο βόλοι στην ίδια θέση;

**Άσκηση 7.** Βρείτε μια ισοτιμία ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4}, \\ x \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

**Άσκηση 8.** Λύστε την ισοτιμία  $x^3 + 4x + 8 \equiv 0 \pmod{15}$ .

**Άσκηση 9.** Λύστε τις παρακάτω ισοτιμίες:

1.  $121x^5 + x^2 - 24x + 143 \equiv 0 \pmod{11}$ .
2.  $3x^7 + 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ .
3.  $7x^7 + 16x^2 + 10 \equiv 0 \pmod{21}$ .