UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

3rd exercise set

Exercise 1. Find $13^{23}27^{41} \pmod 8$.

Exercise 2. Prove that $7 \mid 111^{333} + 333^{111}$.

Exercise 3. Prove that $(-13)^{n+1} \equiv (-13)^n + (-13)^{n-1} \pmod{181}$, for $n \geq 1$.

Exercise 4. Find the residue of 4444^{4444} divided by 9.

Exercise 5. Prove that $383838 \mid n^{37} - n$.
Hint: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$.

Exercise 6. Prove that the last two digits of $n^{22} - n^2$ are zeros.

Exercise 7. Let $m, n \in \mathbb{Z}$, such that $(m, n) = 1$. Show that

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

Exercise 8. Let p, q be distinct primes such that

$$a^p \equiv a \pmod q \text{ and } a^q \equiv a \pmod p.$$

Show that

$$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}.$$

Exercise 9. Solve the following congruences:

1. $34x \equiv 60 \pmod{98}$,
2. $255x \equiv 221 \pmod{391}$,
3. $-671x \equiv 121 \pmod{737}$.

Exercise 10. Find all the numbers $n > 0$, such that $n^{13} \equiv n \pmod{1365}$.

Exercise 11. Let p be an odd prime. Show that

$$1^2 3^2 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΜΕΜ204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

3ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Υπολογίστε το $13^{23}27^{41} \pmod 8$.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι $7 \mid 111^{333} + 333^{111}$.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι $(-13)^{n+1} \equiv (-13)^n + (-13)^{n-1} \pmod{181}$, για $n \geq 1$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης 4444^{4444} δια 9.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι $383838 \mid n^{37} - n$.
Hint: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι τα δυο τελευταία ψηφία του $n^{22} - n^2$ είναι μηδέν.

Άσκηση 7. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

Άσκηση 8. Έστω p, q διακριτοί πρώτοι, τέτοιοι ώστε

$$a^p \equiv a \pmod q \text{ and } a^q \equiv a \pmod p.$$

Δείξτε ότι

$$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}.$$

Άσκηση 9. Λύστε τις παρακάτω ισοτιμίες:

1. $34x \equiv 60 \pmod{98}$,
2. $255x \equiv 221 \pmod{391}$,
3. $-671x \equiv 121 \pmod{737}$.

Άσκηση 10. Βρείτε όλους τους αριθμούς $n > 0$, τέτοιους ώστε $n^{13} \equiv n \pmod{1365}$.

Άσκηση 11. Έστω p περιττός πρώτος. Δείξτε ότι

$$1^2 3^2 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$$