UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

2nd exercise set

Exercise 1. Show that $\mu^{-1} = \nu$, where $\nu(n) = 1$ for all n.

Exercise 2. Show that for every $n \geq 1$, $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

Exercise 3. Let p be a prime. Show that

$$\sum_{d|n} \mu(d)\mu(\gcd(p,d)) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 2, & \text{if } n = p^a,\ a \geq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Exercise 4. Show that for every $n > 2$, $\phi(n)$ is even.

Exercise 5. How many numbers $1 \leq k \leq 3600$ have a non-trivial common factor with 3600?

Exercise 6. Show that $m \mid n \Rightarrow \phi(m) \mid \phi(n)$.

Exercise 7. Show that if m and n have the same prime factors (possibly in different powers), then $n\phi(m) = m\phi(n)$.

Exercise 8. Find all n such that $\phi(n) = \frac{n}{2}$.

Exercise 9. Find all n such that $\phi(n) = 12$.

Exercise 10. Find all n such that $\sigma(n) = 12$.

Exercise 11. Find all n such that $\tau(n) = 12$.

Exercise 12. Define $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Show that σ_k is multiplicative.

Exercise 13. Prove the following identities:

1. $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.
2. $\sum_{d|n} \sigma(d) = n \sum_{d|n} \frac{\tau(d)}{d}$.
3. $n \cdot \sum_{d|n} \frac{\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d \cdot \tau(d)$.

Exercise 14. If n is a perfect number, show that $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΜΕΜ204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

2ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $\mu^{-1} = \nu$, όπου $\nu(n) = 1$ για κάθε n.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

Άσκηση 3. Έστω p πρώτος. Δείξτε ότι

$$\sum_{d|n} \mu(d)\mu(\gcd(p,d)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1, \\ 2, & \text{αν } n = p^a,\ a \geq 1, \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για κάθε $n > 2$, ο $\phi(n)$ είναι άρτιος.

Άσκηση 5. Πόσοι αριθμοί $1 \leq k \leq 3600$ έχουν κάποιο μη-τετριμμένο κοινό παράγοντα με το 3600?

Άσκηση 6. Δείξτε ότι $m \mid n \Rightarrow \phi(m) \mid \phi(n)$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι αν οι m και n έχουν τους ίδιους πρώτους παράγοντες (ενδεχομένως σε διαφορετικές δυνάμεις), τότε $n\phi(m) = m\phi(n)$.

Άσκηση 8. Βρείτε όλα τα n τέτοια ώστε $\phi(n) = \frac{n}{2}$.

Άσκηση 9. Βρείτε όλα τα n τέτοια ώστε $\phi(n) = 12$.

Άσκηση 10. Βρείτε όλα τα n τέτοια ώστε $\sigma(n) = 12$.

Άσκηση 11. Βρείτε όλα τα n τέτοια ώστε $\tau(n) = 12$.

Άσκηση 12. Αν $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, δείξτε ότι η σ_k είναι πολλαπλασιαστική.

Άσκηση 13. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

1. $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.
2. $\sum_{d|n} \sigma(d) = n \sum_{d|n} \frac{\tau(d)}{d}$.
3. $n \cdot \sum_{d|n} \frac{\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d \cdot \tau(d)$.

Άσκηση 14. Αν ο n είναι τέλειος, δείξτε ότι $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.