UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

1st exercise set

Exercise 1. Without using induction, show that for every n, $2 \mid n(n+1)$ and that $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Exercise 2. Show that for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercise 3. Show that for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $15 \mid 2^{4n} - 1$.

Exercise 4. Show that for every $\lambda, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$,

1. $[\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n] = |\lambda| [a_1, \ldots, a_n]$ and
2. if $[a_1, \ldots, a_n] = m$, then $\left(\frac{m}{a_1}, \ldots, \frac{m}{a_n} \right) = 1$.

Exercise 5. Find all the integers $a \neq 3$ such that $a - 3 \mid a^3 - 3$.

Exercise 6. Find all the integers a such that both 624 and 301 leave a remainder of 16 when divided by a.

Exercise 7. If $n > 1$, show that $n^4 + 4$ is composite.

Exercise 8. Without using Dirichlet's theorem, show that there are infinitely many primes of the forms $4k + 3$ and $6\ell + 5$.

Exercise 9. Find all $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, such that $ab = 480$ and $[a, b] = 240$.

Exercise 10. Let $a = a_m \cdots a_0$ be the decimal expression a, i.e., $a = \sum_{i=0}^{m} 10^i a_i$. Show that:

(a) $2 \mid a \iff 2 \mid a_0$.
(b) $3 \mid a \iff 3 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$.
(c) $4 \mid a \iff 4 \mid 10a_1 + a_0$.
(d) $5 \mid a \iff 5 \mid a_0$.
(e) $7 \mid a \iff 7 \mid 2a_0 - \frac{a - a_0}{10}$.
(f) $9 \mid a \iff 9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$.
(g) $11 \mid a \iff 11 \mid \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$.
(h) $25 \mid a \iff 25 \mid 10a_1 + a_0$.

Exercise 11. Find all $x \in \mathbb{Q}$, such that $A = 3x^2 - 5x \in \mathbb{Z}$.

Exercise 12. Show that if $2^n - 1$ is a prime, then n is a prime.

Exercise 13. The *Fibonacci sequence* $1, 1, 2, 3, \ldots$ is defined recursively as $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, for $n \geq 2$, and $a_1 = a_2 = 1$. Show that $(a_n, a_{n+1}) = 1$ for every $n \geq 1$

Exercise 14. Suppose that $a, b > 1$ and $(a, b) = 1$. Then:

1. There exists some $x, y > 0$ such that $ax - by = 1$.
2. If $x^a = y^b$, then $x = n^b$ and $y = n^a$ for some n.
3. For every $n > ab$, there exist some $x, y > 0$ such that $n = ax + by$.
4. There are no $x, y > 0$ such that $ab = ax + by$.

Exercise 15. If $a > 1$, then $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΜΕΜ204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Χωρίς να κάνετε χρήση επαγωγής, δείξτε ότι για κάθε n, $2 \mid n(n+1)$ και ότι $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $15 \mid 2^{4n} - 1$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$,

1. $[\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n] = |\lambda|[a_1, \ldots, a_n]$ και
2. αν $[a_1, \ldots, a_n] = m$, τότε $\left(\frac{m}{a_1}, \ldots, \frac{m}{a_n}\right) = 1$.

Άσκηση 5. Βρείτε όλους τους ακέραιους $a \neq 3$ τέτοιους ώστε $a - 3 \mid a^3 - 3$.

Άσκηση 6. Βρείτε όλους τους ακέραιους a τέτοιους ώστε αμφότεροι οι 624 και 301 αφήνουν υπόλοιπο 16 αν διαιρεθούν από τον a.

Άσκηση 7. Αν $n > 1$, δείξτε ότι ο $n^4 + 4$ είναι σύνθετος.

Άσκηση 8. Χωρίς να κάνετε χρήση του Θεωρήματος Dirichlet, δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι των μορφών $4k + 3$ και $6\ell + 5$.

Άσκηση 9. Βρείτε όλους τους $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, τέτοιους ώστε $ab = 480$ και $[a, b] = 240$.

Άσκηση 10. Αν $a = a_m \cdots a_0$ είναι η δεκαδική έκφραση του a, δηλαδή $a = \sum_{i=0}^{m} 10^i a_i$. Δείξτε ότι:

(a) $2 \mid a \iff 2 \mid a_0$.
(b) $3 \mid a \iff 3 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$.
(c) $4 \mid a \iff 4 \mid 10a_1 + a_0$.
(d) $5 \mid a \iff 5 \mid a_0$.
(e) $7 \mid a \iff 7 \mid 2a_0 - \frac{a-a_0}{10}$.
(f) $9 \mid a \iff 9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$.
(g) $11 \mid a \iff 11 \mid \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$.
(h) $25 \mid a \iff 25 \mid 10a_1 + a_0$.

Άσκηση 11. Βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{Q}$, τέτοιους ώστε $A = 3x^2 - 5x \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 12. Δείξτε ότι αν ο $2^n - 1$ είναι πρώτος, τότε ο n είναι πρώτος.

Άσκηση 13. Η *ακολουθία Fibonacci* $1, 1, 2, 3, \ldots$ ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, για $n \geq 2$, και $a_1 = a_2 = 1$. Δείξτε ότι $(a_n, a_{n+1}) = 1$ για κάθε $n \geq 1$

Άσκηση 14. Αν $a, b > 1$ και $(a, b) = 1$, δείξτε ότι:

1. Υπάρχουν $x, y > 0$ τέτοιοι ώστε $ax - by = 1$.
2. Αν $x^a = y^b$, τότε $x = n^b$ και $y = n^a$ για κάποιο n.
3. Για κάθε $n > ab$, υπάρχουν κάποιοι $x, y > 0$ τέτοια ώστε $n = ax + by$.
4. Δεν υπάρχουν $x, y > 0$ τέτοιοι ώστε $ab = ax + by$.

Άσκηση 15. Αν $a > 1$, τότε $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.