UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)
LECTURER: G. KAPETANAKIS

6th exercise set

Exercise 1. Show that if a is primitive modulo n, then a^k is primitive modulo n if and only if $(\phi(n), k) = 1$. Moreover, if $\mathbb{Z}_n$ contains one primitive root, it contains a total of $\phi(\phi(n))$ primitive roots, given by the above rule.

Exercise 2. Find all the primitive roots modulo 54 and modulo 55.

Exercise 3. Prove that if one knows n and $\phi(n)$ and knows that $n = pq$ for some distinct primes p and q, then he/she can compute p and q without performing any hard computation, such as the factorization of n.

Exercise 4. Find all the integer solutions of $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Exercise 5. Find all the integer solutions of $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Exercise 6. Find all the integer solutions of $221x + 340y = 51$.

Exercise 7. Find all the integer solutions of $6x + 4y + 8z = 2$.

Exercise 8. Does the equation $9x^2 + 35y^2 - 721z^2 = 0$ have non-trivial solutions?

Exercise 9. Prove that the following equations have integer solutions.

1. $102x + 165y = 3$.
2. $4x^2 + 211y = 5$.

Exercise 10. Show that the only integer solution of $x^2 + y^2 = 3z^2$ is the trivial one.

Exercise 11. Find all the integer solutions of the equation

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m,$$

where $x, y, z, m \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \neq 0$ and x, y, z are pairwise co-prime.

Exercise 12. Show that there does not exist any integer n, such that $\frac{7n-1}{4}, \frac{5n+3}{12} \in \mathbb{Z}$.

Exercise 13. Find all the right triangles, with integer sides, whose area equals their perimeter.

Exercise 14. Examine whether the equation $75x^2 + 27y^2 - 30z^2 = 0$ has a non-trivial integer solution.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΜΕΜ204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

6ο σετ ασκήσεων

Άσκηση 1. Δείξτε ότι αν ο a είναι πρωταρχικός modulo n, τότε ο a^k είναι επίσης πρωταρχικός modulo n αν και μόνο αν $(\phi(n), k) = 1$. Επιπλέον, αν το $\mathbb{Z}_n$ περιέχει μια πρωταρχική ρίζα, τότε περιέχει συνολικά $\phi(\phi(n))$ πρωταρχικές ρίζες, που δίνονται από τον παραπάνω κανόνα.

Άσκηση 2. Βρείτε όλες τις πρωταρχικές ρίζες modulo 54 και modulo 55.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι αν κάποιος γνωρίζει τα n και $\phi(n)$ και επιπλέον γνωρίζει ότι $n = pq$ για διαφορετικούς πρώτους p και q, τότε μπορεί να υπολογίσει τα p και q χωρίς να κάνει κάποιον δύσκολο υπολογισμό, όπως την παραγοντοποίηση του n.

Άσκηση 4. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις της $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Άσκηση 5. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις της $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Άσκηση 6. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις της $221x + 340y = 51$.

Άσκηση 7. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις της $6x + 4y + 8z = 2$.

Άσκηση 8. Έχει η εξίσωση $9x^2 + 35y^2 - 721z^2 = 0$ μη-τετριμμένες λύσεις;

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις.

1. $102x + 165y = 3$.
2. $4x^2 + 211y = 5$.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι η μοναδική ακέραια λύση της $x^2 + y^2 = 3z^2$ είναι η τετριμμένη.

Άσκηση 11. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m,$$

όπου $x, y, z, m \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \neq 0$ και x, y, z πρώτοι ανά δύο.

Άσκηση 12. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραιος n, με $\frac{7n-1}{4}, \frac{5n+3}{12} \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 13. Βρείτε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα, με ακέραιες πλευρές, που το εμβαδό τους ισούται με την περίμετρό τους.

Άσκηση 14. Εξετάστε κατά πόσο η εξίσωση $75x^2 + 27y^2 - 30z^2 = 0$ έχει μη-τετριμμένη ακέραια λύση.