Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

Εστω $P(n)$ ένα κατηγόρημα που ορίζεται (δηλαδή που είναι αληθές ή ψευδές) για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Μια απόδειξη με επαγωγή έχει πάντα αυτήν τη δομή:

- δείχνουμε οτι η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής,
- δείχνουμε οτι εάν $P(n)$ είναι αληθής τότε $P(n+1)$ είναι αληθής,
- επικαλούμαστε το αξίωμα (Φ3) για να συμπεράνουμε οτι $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

π.χ. Δείξτε ότι $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για καθε $n \geq 1$

π.χ. Δείξτε ότι $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ για καθε $n \geq 1$

- βαση:

- επαγ. υποθεση:

- επαγ. βημα:

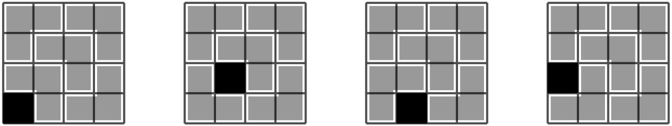
π.χ. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Δείξτε ότι

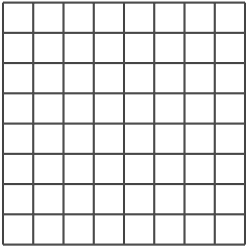
(i) ο ορος a_{3n} είναι άρτιος για κάθε $n \geq 1$

(ii) ο ορος a_{5n} είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \geq 1$

ασκ. Το τριόμινο είναι παρόμοιο με το ντόμινο, αλλά αποτελείται από κομμάτια σε σχήμα Γ. Μία σκακιέρα που έχει m τετράγωνα σε κάθε πλευρά λέγεται σκακιέρα $m \times m$.

Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα της οποίας λείπει ένα οποιοδήποτε τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί από κομμάτια τριόμινο.





Σε μερικές περιπτώσεις, η υπόθεση οτι αληθεύει η $P(n)$ δεν αρκεί για να αποδείξουμε την $P(n+1)$.

Μπορεί να χρειάζεται η υπόθεση οτι όλες οι προτάσεις $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ αληθεύουν.

Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε την "Ισχυρή μορφή της Αρχής Επαγωγής".

- $P(0)$ αληθεύει
- Εάν η υπόθεση οτι αληθεύουν οι $P(m)$ για κάθε $m \leq n$, συνεπάγεται οτι η $P(n+1)$ αληθεύει,
- Τότε η $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Αποδ. Θεωρούμε το κατηγόρημα

$$Q(n) : \text{“ αληθεύευουν τα } P(0), P(1), \ldots, P(n)\text{”}$$

Η 'Ισχυρή μορφή της Αρχής Επαγωγής' γίνεται

- $Q(0)$ αληθεύει
- Εάν αληθεύει η $Q(n)$ τότε αληθεύει η $Q(n+1)$

Αρχή Ελαχίστου

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή ένα στοιχείο που ανήκει στο υποσύνολο αυτό και είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο στοιχείο του υποσυνόλου.

Απόδειξη.

Πρέπει ν.δ.ο. άν $S \subset \mathbb{N}_0$, $S \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε για κάθε $s \in S$, ισχύει $a \leq s$.

Υποθέτουμε οτι δεν υπάρχει τέτοιο a και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Θεωρούμε το κατηγόρημα $P_S(n) : n \notin S$.

Τό $P_S(0)$ είναι αληθές: εάν $0 \in S$ τότε το 0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του S, αλλά υποθέσαμε οτι δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του S, άρα $0 \notin S$.

Υποθέτουμε οτι $P_S(m)$ αληθεύει για κάθε $m \leq n$, δηλαδή εάν $m \leq n$ τότε $m \notin S$.

Δειχνουμε οτι $P_S(n+1)$ αληθεύει.

Εάν $n+1 \in S$ τότε $n+1$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του S, το οποίο είναι άτοπο (διότι έχουμε υποθέσει ότι τι S δεν έχει ελάχιστο στοιχειο).

Από την Ισχυρή μορφή της Αρχής Επαγωγής, $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, άρα $S = \emptyset$.

□

π.χ. Δειξτε ότι κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_k 2^k$$

για κάποιο φυσικό $k \geq 1$ και αριθμούς $a_i = 0$ ή 1.

- βαση:
- επαγ. υποθεση:
- επαγ. βημα: