

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2019-20
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. Έστω K σώμα με $\text{char}K = p$, $p = \text{πρώτος}$.

α) Έστω $a \in \bar{K}$ μία ρίζα τού πολυωνύμου $f(x) = x^p - x - c \in K[x]$. Δείξτε τότε ότι και το $a + \bar{1}$ είναι ρίζα τού $f(x)$ και συμπεράνατε ότι $f(x) = \prod_{i=0}^{p-1} (x - a - \bar{i})$, $\bar{i} \in \mathbb{Z}_p$. (Σημείωση: $\text{char}K = p$ και επομένως τό \mathbb{Z}_p μπορεί να θεωρηθεί ως υπόσωμα τού K).

β) Έστω $E = K(a)$, a όπως παραπάνω. Δείξτε ότι η επέκταση $K \leq E$ είναι επέκταση Galois.

γ) Δείξτε ότι υπάρχει μονομορφισμός ομάδων $\phi : \text{Gal}(E/K) \rightarrow \mathbb{Z}_p$. (Υπόδειξη: Πώς ορίζεται ένας αυτομορφισμός $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$;))

δ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ ή είναι ανάγωγο ή ότι αναλύεται πάνω από το K .

Πρόβλημα 2. Θεωρούμε τό πολυώνυμο $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω E τό σώμα ανάλυσής του. Βρείτε τήν ομάδα $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Πρόβλημα 3. Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα. Έστω $E \leq \mathbb{C}$ τό σώμα ανάλυσης τού $f(x)$. Δείξτε ότι η ομάδα $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη προς τήν ομάδα S_3 τών μεταθέσεων τριών στοιχείων.

Πρόβλημα 4. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με σώμα ανάλυσης E και έστω ότι η ομάδα $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Δείξτε ότι αν a είναι μια οποιαδήποτε ρίζα τού $f(x)$ τότε $E = \mathbb{Q}(a)$.

Πρόβλημα 5. Έστω K σώμα χαρακτηριστικής p και έστω $a \in K$ στοιχείο που δεν είναι p -ρίζα στοιχείου τού K (δηλ. $a \neq c^p$, για οποιοδήποτε $c \in K$). Έστω $b \in \bar{K}$ ρίζα τής εξίσωσης $x^p - a = 0$. Βρείτε το $\text{Gal}(k(b)/K)$.

Πρόβλημα 6. Δείξτε τίς ακόλουθες ιδιότητες τών κυκλοτομικών πολυωνύμων:

α) $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, όπου m είναι τό γινόμενο τών διαφορετικών πρώτων που εμφανίζονται στην ανάλυση τού n .

β) $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, όπου $(p, n) = 1$.

γ) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, όπου n περιττός φυσικός.

δ) Δείξτε ότι οι συντελεστές τού πολυωνύμου $\Phi_n(x)$ ικανοποιούν τήν ιδιότητα $a_k = a_{\phi(n)-k}$, για κάθε k με $0 \leq k \leq \phi(n)$.

Πρόβλημα 7. Έστω $\omega_7 = e^{2\pi i/7}$. Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\omega_7 + \omega_7^5)$.

Πρόβλημα 8. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και E τό σώμα ανάλυσής του στο \mathbb{C} . Υποθέτουμε ότι τό $f(x)$ έχει μία ρίζα στο \mathbb{C} που δεν είναι στο \mathbb{R} . Έστω $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η σ επάγει ένα στοιχείο τής $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός τής σ στο E ορίζει ένα στοιχείο τής $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Βρείτε το αντίστοιχο ενδιάμεσο σώμα $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ τής κυκλικής υποομάδας $\langle \sigma \rangle \leq \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ και τόν βαθμό τής επέκτασης $[L : \mathbb{Q}]$.