Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

- Αντικείμενο της συνδυαστικής: υπολογισμός αριθμού διαφορετικών αποτελεσμάτων ενός «πειράματος» ή «γεγονότος» ή «ενδεχομένου» (με συνδυαστικά επιχειρήματα).

π.χ. Ρίχνω δύο ζάρια. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

π.χ. Ρίχνω ένα ζάρι και ένα νόμισμα. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

π.χ. Εχω 10 μπλούζες, 7 παντελόνια και 5 ζευγάρια παπούτσια. Με πόσους τρόπους μπορώ να ντυθώ;

π.χ. Εχω 10 αριθμημένους βολους. Με πόσους τρόπους μπορω να διαλέξω 4 από αυτους;

π.χ. Εχω 10 όμοιους βολους. Με πόσους τρόπους μπορω να τους τοποθετήσω σε 4 αριθμημένα δοχεία;

π.χ. Εχω μία ομάδα 20 φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορω να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή με πρόεδο, αντιπρόεδρο και γραμματέα;

π.χ. Εχω τρεις γεύσεις παγωτού (σε μεγαλη ποσότητα). Με ποσους τρόπους μπορώ να κεράσω από μία μπάλα σε 10 παιδια;

- Πολλά από τα προβλήματα συνδυαστικής ανάγονται στο πρόβλημα καταμέτρησης των στοιχείων ένος πεπερασμένου συνόλου

- Συμβολισμός $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$
- Λέμε οτι *ένα σύνολο A έχει k στοιχεία*, για $k \in \mathbb{N}_0$, εάν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : [k] \to A$.
- Ενα σύνολο είναι *πεπερασμένο εάν έχει k στοιχεία για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$.*
- *Τον αριθμό των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A τον συμβολίζουμε $|A|$ ή $\#(A)$.*

Κανονας αθροισματος: *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα ανα δύο ξένα μεταξύ τους, δηλ. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$, τότε*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Κανόνας γινομένου: *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα τότε* $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$

Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: *Αν A_1, A_2 πεπερασμένα σύνολα, τοτε* $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

- Κανονας αθροισματος: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα ανα δύο ξένα μεταξύ τους, δηλ. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$, τότε
$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Αποδ. με επαγωγή στο πλήθος n. Για $n = 2$: Εστω $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Θα δείξουμε ότι $|A_1 \cup A_2| = n_1 + n_2$.

Υπάρχει $\varphi : A_1 \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} [n_1]$ και $\psi : A_2 \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} [n_2]$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow [n_1 + n_2]$ με $f(a) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{αν } a \in A_1 \\ \psi(a) + n_1 & \text{αν } a \in A_2 \end{cases}$

Η f είναι καλά ορισμένη: διοτι $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Η f είναι επί: $f(A_1 \cup A_2) = \{1, \ldots, n_1\} \cup \{1 + n_1, 2 + n_1, \ldots, n_2 + n_1\} = [n_1 + n_2]$

Η f είναι 1-1: εστω $f(a) = f(a')$ 1η περίπτωση αν $f(a) = f(a') \leq n_1$ τότε $\varphi(a) = \varphi(a')$ αρα $a = a'$

2η περίπτωση αν $f(a) = f(a') > n_1$ τότε $\psi(a) + n_1 = \psi(a') + n_1$ αρα $a = a'$

Επαγωγικό βήμα $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$ κ.τ.λ.

- Κανόνας γινομένου: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα τότε $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$

Αποδειξη με επαγωγή στο n

Για $n = 2$: Υποθέτουμε ότι $|A| = k$, $|B| = r$ και δειχνουμε οτι $|A \times B| = k \cdot r$

Μπορούμε να γράψουμε $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ και $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$

Τοτε, το σύνολο $A \times B$ είναι η ξένη ενωση των παρακάτω συνόλων

$$A \times B = (A \times \{b_1\}) \cup (A \times \{b_2\}) \cup \cdots \cup (A \times \{b_r\})$$

Επομένως, από τον κανόνα αθροίσματος

$$|A \times B| = |A \times \{b_1\}| + |A \times \{b_2\}| + \cdots + |A \times \{b_r\}| = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{r \text{ φορες}} = k \cdot r$$

Επαγωγικό βήμα : $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n+1} = \big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\big) \times A_{n+1}$

Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: Αν A, B πεπερασμένα σύνολα, τοτε $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Εστω $|A| = k + \ell, |B| = r + \ell$ και $|A \cap B| = \ell$

Δηλαδη, μπορούμε να γράψουμε $A \cap B = \{c_1, \ldots, c_\ell\}$

και $A = \{a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_\ell\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_\ell\}$ οπου $a_i \notin B$ και $b_i \notin A$

Τότε $A \cup B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \cdots, c_\ell\}$

Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού για τρία σύνολα: Αν A, B, C πεπερασμένα σύνολα, τοτε

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ πεπερασμένα σύνολα, τοτε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Ισοδύναμη διατύπωση

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i_1=1}^{n} |A_{i_1}| - \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1=1}^{n-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-1} \sum_{i_3=i_2+1}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{i_1=1}^{n-k+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-k+2} \cdots \sum_{i_j=i_{j-1}+1}^{n-k+j} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r|$$

- Η απόδειξη της αρχής εγκλεισμου αποκλεισμού γίνεται με επαγωγή στο n

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\
&= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_4| \\
&\qquad - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| &= |(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)| \\
&= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\quad - |(A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4)| - |(A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)| - |(A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)| \\
&\quad + |(A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)| \\
&= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}$$

Πρόταση: **Εάν A είναι πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεια, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του είναι 2^n.**

Δηλαδή $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Με επαγωγή στο $r = |A|$. Όταν $r = 0$ τότε $A = \emptyset$. Το μοναδικό υποσύνολο του A είναι το $\emptyset$ άρα $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για r και δείχνουμε το ζητούμενο για $r + 1$.

Εάν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}\}$, θεωρούμε τα σύνολα

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \{X \subseteq A \,|\, a_{r+1} \notin X\} \\ \\ S_2 = \{X \subseteq A \,|\, a_{r+1} \in X\} \end{array}\right\} \mathcal{P}(A) = S_1 \cup S_2 \text{ και } S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

Θέτουμε $B = A \setminus \{a_{r+1}\} = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Τότε $S_1 = \mathcal{P}(B)$.

Από το S_2 ορίζουμε αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : S_2 \longrightarrow S_1$ με $f(X) = X \setminus \{a_{r+1}\}$.

Αρα $|S_1| = |S_2|$.

Από την επαγωγική υπόθεση, $|S_1| = 2^r$, άρα

$$|\mathcal{P}(A)| = |S_1| + |S_2| = 2|S_1| = 2 \cdot 2^r = 2^{r+1} .$$

Πρόταση: Εαν $\phi : A \longrightarrow B$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων, τότε $|A| = |B|$.

Εστω $|B| = k$, θα δείξουμε ότι $|A| = k$

Υπάρχει $f : B \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} [k]$

Επομενως, $f \circ \phi : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} [k]$ αρα $|A| = k$

- Εφαρμογή της παραπάνω πρότασης:

  Αρκετά συχνά, για να βρουμε τον πληθάριθμο ενός συνόλου είναι ευκολότερο να βρούμε μία

$$\phi : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$$

  σε ένα σύνολο B του οποιου γνωρίζουμε ή μπορούμε ευκολότερα να υπολογίσουμε τον πληθάριθμό $|B|$.

Πρόταση: **Εάν A είναι πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεια, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του είναι 2^n.**

Δηλαδή $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

2η απόδειξη: Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f : \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ φορες}}$

Από τον κανόνα γινομένου $|B| = 2^n$, αρα και $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Παρατηρούμε ότι $B = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i = 0 \text{ ή } 1\}$

Ορίζουμε $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow B$ ως εξης: αν $X \subseteq A$ τότε $f(X) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όπου $x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_i \in X \\ 0 & \text{αν } a_i \notin X \end{cases}$

- η f είναι καλά ορισμένη ✔
- η f είναι 1-1: αν $f(X) = f(X') = (x_1, \ldots, x_n)$ τότε $X = Y = \{a_i \in A : x_i = 1\}$
- η f είναι επί: εστω $(x_1, \ldots, x_n)$ ακολουθία με $x_i = 0$ ή 1. Τοτε, αν $X = \{a_i \in A : x_i = 1\}$ τότε $f(X) = (x_1, \ldots, x_n)$

π.χ. Ρίχνω δύο ζάρια. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα; $6 \cdot 6$

π.χ. Ρίχνω ένα ζάρι και ένα νόμισμα. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα; $2 \cdot 6$

π.χ. έχω 10 μπλούζες, 7 παντελόνια και 5 ζευγάρια παπούτσια. Με πόσους τρόπους μπορώ να ντυθώ; $10 \cdot 7 \cdot 5$

- Έστω ενδεχόμενο A που μπορεί να συμβεί με n τρόπους και ενδεχόμενο B που μπορεί να συμβεί με m τρόπους.
- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: το αποτέλεσμα του A δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
- Κανόνας γινομένου: Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε ο συνδυασμός των A και B μπορεί να συμβεί με $m \times n$ τρόπους
- Ο κανόνας γινομένου γενικεύεται για περισσότερα από δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

π.χ. Πόσοι 4-ψήφιοι αριθμοί είναι < 4000; $\underline{3} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$

π.χ. Πόσοι φυσικοί αριθμοί k είναι $3000 \leq k < 5000$; $\underline{2} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$

π.χ. Υπολογίστε το πλήθος των ακέραιων αριθμών k στο διάστημα $10^5 \leq k < 10^6$

$$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}$$

π.χ. Υπολογίστε το πλήθος των ακέραιων αριθμών k στο διάστημα $10^5 \leq k < 10^6$ οι οποίοι διαιρούνται με το 2

$$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{5}$$

π.χ. Πόσες είναι οι επιλογές ενός φοιτητή για μεταπτυχιακές σπουδές αν τον έχουν κάνει δεκτό 3 πανεπιστήμια στην Αγγλία, 2 στις Η.Π.Α. και 2 στην Ελλάδα; $3+2+2$

- Έστω ενδεχόμενο A που μπορεί να συμβεί με n τρόπους και ενδεχόμενο B που μπορεί να συμβεί με m τρόπους
- αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα: τα ενδεχόμενα A και B **δεν** μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα
- Κανόνας αθροίσματος: Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα τότε η πραγματοποίηση κάποιου από αυτά μπορεί να γίνει με $m+n$ τρόπους
- Ο κανόνας αθροισματος γενικεύεται για περισσότερα από δύο αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα

π.χ. Πόσες (τυχαίες) λέξεις μήκους 4 με γραμματα του ελληνικού αλφαβήτου αρχίζουν με α ή β;

$$\underline{1}\cdot\underline{24}\cdot\underline{24}\cdot\underline{24} \quad + \quad \underline{1}\cdot\underline{24}\cdot\underline{24}\cdot\underline{24}$$

π.χ. Στην αντιπροσωπία αυτοκινήτων A πωλούνται toyota, opel και fiat σε κόκκινο και πράσινο χρώμα. Στην αντιπροσωπία αυτοκινήτων B πωλούνται toyota, lancia, ford και renault σε κόκκινο, μπλέ και ασημί χρώμα.

Πόσες είναι όλες οι επιλογές για αγορά αυτοκινήτου; $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 1$

- Έστω ενδεχόμενο A που μπορεί να συμβεί με n τρόπους και ενδεχόμενο B που μπορεί να συμβεί με m τρόπους
- αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: Αν τα ενδεχόμενα A και B **δεν** είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα τότε η πραγματοποίηση κάποιου από αυτά μπορεί να γίνει με

$$m + n - |A \cap B| \text{ τρόπους}$$

όπου $A \cap B$ είναι οι κοινές περιπτώσεις των ενδεχομένων A, B

π.χ. Πόσες (τυχαίες) λέξεις μήκους 4 με γραμματα του ελληνικού αλφαβήτου αρχίζουν με α ή τελειώνουν με β;

$$\underline{1} \cdot \underline{24} \cdot \underline{24} \cdot \underline{24} + \underline{24} \cdot \underline{24} \cdot \underline{24} \cdot \underline{1} - \underline{1} \cdot \underline{24} \cdot \underline{24} \cdot \underline{1}$$

π.χ. Υπολογίστε το πλήθος των ακέραιων αριθμών k στο διάστημα $10^5 \leq k < 10^6$ οι οποίοι διαιρούνται με το 2 ή με το 5;

- Πόσοι διαιρούνται με το 2; $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{5}$
- Πόσοι διαιρούνται με το 5; $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{2}$
- Ποιοί έχουν μετρηθεί δύο φορές;

  αυτοί που διαιρούνται και με 2 και με 5: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1}$
- Τελικά: $9 \cdot 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 2 \cdot 10^4 - 9 \cdot 1 \cdot 10^4 = 54 \cdot 10^4$

π.χ. Υπολογίστε το πλήθος των ακέραιων αριθμών k στο διάστημα $10^5 \leq k < 10^6$ οι οποίοι διαιρούνται με το 3 ή με το 5;

- Πόσοι διαιρούνται με το 5; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180.000$
- Πόσοι διαιρούνται με το 3; $333.333 - 33.334 + 1 = 300.000$

$100.000,\ 100.001,\ 100.002,\ 100.003,\ 100.004,\ 100.005\,,100.006, \ldots\ldots, 999.996\,, 999.997\,, 999.998\,, 999.999,\ 1.000.000$

$100.000 = 3 \cdot 33.333 + 1 \qquad 1.000.000 = 3 \cdot 333.333 + 1$

$100.002 = 3 \cdot 33.334 \qquad 999.999 = 3 \cdot 333.333$

- Πόσοι διαιρούνται με το 15; $66.666 - 6.667 + 1 = 60.000$

$100.000,\ 100.001,\ 100.002,\ 100.003,\ 100.004,\ 100.005\,,100.006, \ldots\ldots, 999.996\,, 999.997\,, 999.998\,, 999.999,\ 1.000.000$

$100.000 = 15 \cdot 6.666 + 10 \qquad 1.000.000 = 15 \cdot 66.666 + 10$

$100.005 = 15 \cdot 6.667 \qquad 999.990 = 15 \cdot 66.666$

- Τελικά: $180.000 + 300.000 - 60.000$