Α. Διάλεξη 3η

⇝ Κατασκευαστική διαδικασία συστημάτων αριθμών.

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$

1. Τομές Dedekind
2. Ακολουθίες Cauchy
3. Συνεχή κλάσματα

Αναλύστες Αξιωματικά, δέχονται την ύπαρξη ενό συνόλου $\mathbb{R}$ που με τα ... ακόλουθα αξιώματα.

7

Συνεχή κλάσματα

Μια διαφορετική παράσταση των πραγματικών αριθμών.

7.1 Συνεχή κλάσματα ρητών αριθμών

Ας είναι $a = 543$ και $b = 314$ δύο ακέραιοι αριθμοί. Εφαρμόζουμε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο:

$543 = 314 + 229$	$\frac{543}{314} = 1 + \frac{229}{314}$
$314 = 229 + 85$	$\frac{314}{229} = 1 + \frac{85}{229}$
$229 = 2 \cdot 85 + 59$	$\frac{229}{85} = 2 + \frac{59}{85}$
$85 = 59 + 26$	$\frac{85}{59} = 1 + \frac{26}{59}$
$59 = 2 \cdot 26 + 7$	$\frac{59}{26} = 2 + \frac{7}{26}$
$26 = 3 \cdot 7 + 5$	$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}$
$7 = 5 + 2$	$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$	$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

Επομένως, ο ρητός αριθμός $\frac{543}{314}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{543}{314} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

2

Η παράσταση αυτή λέγεται συνεχές κλάσμα του $\frac{543}{314}$. Μάλιστα για λόγους συντομίας γράφεται:

$$\frac{543}{314} = [1; 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 2].$$

Ορισμός 7.1.1. Ένα πεπερασμένο συνεχές κλάσμα είναι ένας πραγματικός αριθμός της μορφής

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

όπου οι a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a_i > 0$, για $i \geq 1$. Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ λέγονται μερικά υπόλοιπα του συνεχούς κλάσματος. Το κλάσμα λέγεται απλό όταν οι αριθμοί $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι όλοι τους ακέραιοι.

Πρόταση 7.1.2. *Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως ένα πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη στους όρους του κλάσματος όπως ακριβώς στο παράδειγμα. □

Παρατήρηση 7.1.3. Είναι φανερό ότι ισχύει

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράσταση ενός ρητού σε συνεχές κλάσμα δεν είναι μονοσήμαντη.

Στο παράδειγμά μας το τελευταίο μερικό υπόλοιπο, το 2, μπορούσε να είχε γραφεί $1 + \frac{1}{1}$ οπότε θα είχαμε και

$$\frac{543}{314} = [1; 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 1].$$

Αυτό σημαίνει ότι το μήκος ενός απλού συνεχούς κλάσματος μπορεί να ληφθεί κατά βούληση ως άρτιο ή περιττό.

Παρατήρηση 7.1.4.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0, [a_1; a_2, \ldots, a_n]]$$

Της πρότασης 7.1.2 ισχύει και το αντίστροφο:

Πρόταση 7.1.5. *Κάθε απλό πεπερασμένο συνεχές κλάσμα παριστά έναν ρητό αριθμό*

Απόδειξη. Επαγωγικά ως προς n.

Αν $n = 1$ τότε

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + a_1}{a_1} \in \mathbb{Q},$$

δηλαδή ισχύει.

3

Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \in \mathbb{Q}.$$

Το

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_{k+1}]}.$$

Όμως το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα

$$[a_1; a_2, \ldots, a_{k+1}] =: \frac{r}{s} \in \mathbb{Q},$$

από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής. Επομένως

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{r/s} = \frac{a_0 s + r}{r} \in \mathbb{Q}.$$

✓

□

Παράδειγμα. Το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα $[1; 2, 3, 4, 5, 6]$ παριστά τον ρητό αριθμό $\frac{1393}{972}$.

Ορισμός 7.1.6. Αν ο ρητός αριθμός x παρίσταται από το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

τότε ο ρητός αριθμός

$$c_k := [a_0; a_1, \ldots, a_k],$$

για $0 \leq k \leq n$ θα λέγεται $\boxed{k\text{-στός συγκλίνων}}$ του x.

Παράδειγμα. Το συνεχές κλάσμα του ρητού

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

Οι συγκλίνοντες αυτού είναι οι

$$\begin{aligned}
c_0 &= [1] = 1 \\
c_1 &= [1; 1] = 1 + \frac{1}{1} = 2 \\
c_2 &= [1; 1, 1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} = 1,5 \\
c_3 &= [1; 1, 1, 1, 1] = \frac{5}{3} \sim 1,66 \\
c_4 &= [1; 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{8}{5} = 1,60 \\
c_5 &= [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{13}{8} = 1,625 \\
c_6 &= [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{21}{13} = 1,6153846154
\end{aligned}$$

Παρατήρηση

$1 < \frac{21}{13}$

$\frac{21}{13} < 2$

$1,5 < \frac{21}{13}$

$\frac{21}{13} < 1,66$

$1,60 < \frac{21}{13}$

$\frac{21}{13} < 1,625$

$c_6 = \frac{21}{13} = 1,61538 46154$

Πρόταση 7.1.7. *Αν οι ακέραιοι p_k, q_k, για $0 \leq k \leq n$, ορισθούν ως*

$$p_0 := a_0, \quad q_0 := 1$$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad q_1 := a_1$$

και

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

για κάθε k, $2 \leq k \leq n$, τότε ισχύει $c_k = \frac{p_k}{q_k}$, για $0 \leq k \leq n$.

Η ακολ. ορίζεται αναδρομικά

Απόδειξη. Για $k = 0$, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = [a_0] = c_0$. ✓

Για $k = 1$,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1] = c_1. \checkmark$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιον k, $2 \leq k < n$,

$$c_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Ισχύει

$$c_{k+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}],$$

οπότε από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής, προκύπτει

$$c_{k+1} = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} =$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} =$$

$$= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \checkmark$$

□

Παράδειγμα. Το συνεχές κλάσμα του $x = \frac{52}{23}$ είναι $[2; 3, 1, 5]$. Σχηματίζουμε τον πίνακα:

k	0	1	2	3
a_k	2	3	1	5
p_k	2	7	9	52
q_k	1	3	4	23

Από τον ορισμό του συνεχούς κλάσματος

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

έχουμε ότι $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, και $a_i > 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως $q_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$.

Πόρισμα 7.1.8. *Έστω $a_i \in \mathbb{R}$ για $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ και $a_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Αν $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ και $r_k := [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ τότε ισχύει*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r_k] = \frac{r_k p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

→ Εδώ το συνεχές κλάσμα δεν είναι απλό

Πόρισμα 7.1.9. *Υποθέτουμε ότι $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ και ότι $a_i \geq 1$, $b_i \geq 1$ για $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Αν $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, για $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, και*

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [b_0; b_1, \dots, b_n],$$

τότε $a_i = b_i$, για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη. Ας ονομάσουμε

$$r_1 := [a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, \dots, a_n]}.$$

Το $r_1 \geq 1$. Ομοίως αν

$$s_1 = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

τότε και $s_1 \geq 1$. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$a_0 + \frac{1}{r_1} = b_0 + \frac{1}{s_1}.$$

Αν $r_1 = 1$ τότε $a_0 + \frac{1}{r_1} \in \mathbb{Z}$ συνεπώς $b_0 + \frac{1}{s_1} \in \mathbb{Z}$ άρα $s_1 = 1$ οπότε και $a_0 = b_0$.
Αν $r_1 > 1$ τότε $a_0 + \frac{1}{r_1} \notin \mathbb{Z}$, συνεπώς, $b_0 + \frac{1}{s_1} \notin \mathbb{Z}$. Άρα $s_1 > 1$. Και πάλι $a_0 = b_0$ διότι και οι δύο είναι οι μεγαλύτεροι ακέραιοι $\leq [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει $a_0 = b_0$ και $r_1 = s_1$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά ως προς n. Αν $n = 1$ τότε $a_0 = b_0$ και $r_1 = a_1 = s_1 = b_1$. Έστω ότι ισχύει για $(n-1)$.

Από την υπόθεση

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [b_0; b_1, \dots, b_n]$$

έπεται ότι

$$[a_0, [a_1, a_2, \dots, a_n]] = [b_0, [b_1, b_2, \dots, b_n]]$$

και επομένως $a_0 = b_0$ και $[a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_1; b_2, \dots, b_n]$. Από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής ισχύει ότι $a_i = b_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. □

Παρατήρηση 7.1.10. Το πόρισμα 7.1.9 μας δίνει τη μοναδικότητα της παράστασης ενός πραγματικού αριθμού, σε άπειρο απλό συνεχές κλάσμα, όταν πληρούνται οι προϋποθέσεις αυτού. Το πόρισμα θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενη παράγραφο. Στα επόμενα εδάφια θα χρησιμοποιουμε τον συμβολισμό της πρότασης 7.1.7.

7.2 Ιδιότητες των συγκλινόντων

Για λόγους ομοιομορφίας των παραστάσεων θέτουμε $p_{-1} := 1$ και $q_{-1} := 0$.

Πρόταση 7.2.1. *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$, ισχύει*

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

Απόδειξη. Επαγωγικά ως προς n. Η πρόταση ισχύει για $n = 0$, αφού

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1.$$

Από την πρόταση 7.1.7 προκύπτει ότι

$$q_{n-1}p_n = q_{n-1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) = a_n p_{n-1}q_{n-1} + q_{n-1}p_{n-2}$$

και

$$p_{n-1}q_n = p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n p_{n-1}q_{n-1} + p_{n-1}q_{n-2}.$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = -(q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2}).$$

Από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής έπεται ότι

$$q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2} = (-1)^{n-1}.$$

Επομένως,

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

□

Πόρισμα 7.2.2. *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$, ισχύει*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι το συνεχές κλάσμα $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ είναι απλό, δηλαδή ότι $a_i \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Πόρισμα 7.2.3. *1. Για κάθε φυσικό $n \geq 0$, ισχύει $(p_n, q_n) = 1$.*

2. Η ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη.

1. Προφανώς $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 7.2.1.

2. Άμεση συνέπεια της πρότασης 7.1.7.

□

Πόρισμα 7.2.4. *Αν $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}]$, τότε*

$$q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Απόδειξη. Από την πρόταση 7.2.1 έπεται ότι

$$q_{n+2}p_{n+1} - p_{n+2}q_{n+1} = (-1)^{n+2}.$$

Επομένως

$$p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

χωρίς απόδειξη

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $q_{n+2} > 0$

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+2}}.$$

Όμως, $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = \alpha$ και $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$. Συνεπώς έχουμε το αποδεικτέο. □

Πόρισμα 7.2.5. *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει*

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n.$$

Απόδειξη. Επαγωγικά ως προς n. Για $n = 1$,

$$q_1 p_{-1} - p_1 q_{-1} = a_1 \cdot 1 - p_1 \cdot 0 = (-1)^0 a_1,$$

το οποίο ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$, δηλαδή ότι

$$q_{k+1} p_{k-1} - p_{k+1} q_{k-1} = (-1)^k a_{k+1}.$$

Το $p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}$ και το $q_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}$. Επομένως

$$q_{k+1} p_{k-1} - p_{k+1} q_{k-1} = (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) p_{k-1} - (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_{k-1} =$$
$$= a_{k+1}(q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}).$$

Από την πρόταση 7.2.1 έχουμε

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k,$$

δηλαδή το πόρισμα ισχύει και για $k + 1$. □

Πόρισμα 7.2.6. *Για κάθε φυσικό n, $n \geq 2$, ισχύει*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ

Πόρισμα 7.2.7. *Αν οι $a_1, a_2, \ldots,$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε η ακολουθία $\left\{\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η ακολουθία $\left\{\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Τέλος, από το πόρισμα 7.2.2 προκύπτει ότι $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}}$, για κάθε k, ℓ.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του πορίσματος 7.2.6. □

Πόρισμα 7.2.8. *Αν $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}]$ τότε ισχύει*

$$q_n \alpha - p_n = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{a_{n+2} q_{n+1} + q_n}.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε ότι

$$q_n \alpha - p_n = q_n \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - p_n = \frac{q_n p_{n+2} - p_n q_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

Ο αριθμητής είναι (από το πόρισμα 7.2.5)

$$q_n p_{n+2} - p_n q_{n+2} = -(p_n q_{n+2} - q_n p_{n+2}) = -(-1)^{n+1} a_{n+2} = (-1)^n a_{n+2}.$$

Τέλος,

$$q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$$

και συνεπώς το πόρισμα αποδείχθηκε. □

Πρόταση 7.2.9. *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει*

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

Απόδειξη. Επαγωγικά ως προς το n.

Για $n = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, επομένως $\frac{q_1}{q_0} = a_1 = [a_1]$.

Έστω $n > 1$. Υποθετουμε ότι ισχύει για $(n-1)$, δηλαδή ότι

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}; \ldots, a_1].$$

Το $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Επομένως

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}; a_{n-2}, \ldots, a_1]} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

□

7.3 Γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις και συνεχή κλάσματα

Υπενθυμίζουμε την

Πρόταση 7.3.1. *Αν $a, b, c \in \mathbb{Z}$, η διοφαντική εξίσωση*

$$ax + by = c \text{ έχει λύση} \Leftrightarrow d := (a, b) \mid c.$$

Αν έχει λύση, τότε έχει άπειρες λύσεις. Ιδιαίτερα αν (x_0, y_0) είναι μια λύση, τότε όλες οι λύσεις δίνονται παραμετρικά από τους τύπους:

$$(x_k = x_0 + \frac{b}{d}t, y_k = y_0 - \frac{a}{d}t) \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Με την βοήθεια των συνεχών κλασμάτων μπορούμε εύκολα να βρούμε μία λύση.

Θεωρούμε τη διοφαντική εξίσωση

$$aX + bY = 1,$$

όπου $b > 0$ και $(a, b) = 1$.

Ο $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Έστω $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ το συνεχές κλάσμα αυτού. Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b} \Rightarrow p_n b = a q_n.$$

Το $a \mid p_n b$ και $(a, b) = 1$ συνεπώς $a \mid p_n$. Ομοίως το $b \mid a q_n$ και $(a, b) = 1$ συνεπώς $b \mid q_n$. Σύμφωνα με το πόρισμα 7.2.3 ισχύει και $(p_n, q_n) = 1$, οπότε $p_n \mid a$ και $q_n \mid b$.

Από τα παραπάνω έχουμε $p_n = \pm a$, $q_n = \pm b$. Επειδή $b > 0$ και $q_n > 0$ έπεται ότι $q_n = b$ και συνεπώς και $p_n = a$. ✓

Από τη σχέση $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$, προκύπτει ότι $a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$. Επομένως:

- Αν ο n είναι περιττός, τότε μια λύση της $aX + bY = 1$ είναι $(x_0, y_0) = (q_{n-1}, -p_{n-1})$.
- Αν ο n είναι άρτιος, τότε $-a q_{n-1} + b p_{n-1} = 1$ και συνεπώς μια λύση της $aX + bY = 1$ είναι $(x_0, y_0) = (-q_{n-1}, p_{n-1})$.

Θεωρούμε τώρα την $aX + bY = c$. Μια λύση αυτής είναι η (cx_0, cy_0), όπου (x_0, y_0) λύση της $aX + bY = 1$.

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί μια λύση της διοφαντικής εξίσωσης

$$63x - 23y = -7.$$

Γράφουμε την εξίσωση $-63x + 23y = 7$, ώστε το $b = 23 > 0$. Το συνεχές κλάσμα του $-63/23$ είναι το $-63/23 = [-3; 3, 1, 5]$. Το $p_2/q_2 = -11/4$. Επομένως $p_2 = -11$ και $q_2 = 4$. Επίσης, $p_3/q_3 = -63/23$, άρα $p_3 = -63$, $q_3 = 23$.

$$p_3q_2 - q_3p_2 = (-1)^{3-1} \Rightarrow (-63) \cdot 4 + 23 \cdot 11 = 1.$$

Μια λύση της $(-63)x + 23 \cdot y = 1$ είναι η $(x_0, y_0) = (4, 11)$. Άρα μια λύση της αρχικής είναι η $(x_1, y_1) = (28, 77)$.

Στο sage μπορούμε να κάνουμε πράξεις με συνεχή κλάσματα ως εξής:

```
sage: a=continued_fraction(31/35)
sage: a
[0; 1, 7, 1, 3]
a.convergents()
[0, 1, 7/8, 8/9, 31/35]
```

Η πρώτη εντολή υπολογίζει το συνεχές κλάσμα του ρητού αριθμού $31/35$, ενώ η δεύτερη εντολή υπολογίζει τους συγκλίνοντες.

7.4 Το συνεχές κλάσμα ενός πραγματικού αριθμού

Αν α είναι ένας ρητός αριθμός, τότε έχουμε ήδη δείξει ότι το συνεχές κλάσμα αυτού είναι πεπερασμένο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Μπορούμε να γράψουμε $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, όπου $a_0 = [\alpha]$ και $\alpha_1 > 1$. Συνεχίζοντας επαγωγικά έχουμε

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

$\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - [\alpha_n]}$

όπου $a_n = [\alpha_n]$ και $\alpha_{n+1} > 1$. Ο $\alpha \notin \mathbb{Q}$, άρα η ακολουθία των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ δεν είναι πεπερασμένη. Επομένως, για κάθε $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

ή και

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

Οι συγκλίνοντες p_n, q_n αποτελούν μια ακολουθία ακέραιων, με $(p_n, q_n) = 1$ και $q_n \geq 1$. Το πηλίκο $\frac{p_n}{q_n}$ λέγεται *n-στή κύρια σύγκλιση* του α και ο α_n *n-στο μερικό υπόλοιπο* του α.

Λόγω των πορισμάτων (7.2.8), (7.2.9) και του (7.2.5) προκύπτει ότι

$$a_n < \alpha_n < a_n + 1$$

και ότι $a_n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επίσης ισχύει

$$0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n < q_{n+1} < \cdots$$

Πρόταση 7.4.1. *Για τις άρτιες τιμές του n οι n-στές κύριες συγκλίσεις του α αποτελούν γνήσια αύξουσα ακολουθία η οποία συγκλίνει στο α.*

Για τις περιττές τιμές του n, οι n-στές συγκλίσεις αποτελούν μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία η οποία συγκλίνει στο α. Επιπλέον ισχύει

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}+q_n} < |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η ακολουθία $\left\{\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα και ότι η ακολουθία $\left\{\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα και ότι

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \le \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}},$$

για όλους τους θετικούς ακέραιους k, ℓ.

Μάλιστα, οι ακολουθίες $\left\{\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\left\{\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ φράσσονται από πάνω και από κάτω αντίστοιχα από τον πραγματικό αριθμό α. Επομένως συγκλίνουν.

Έστω ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \beta \le \alpha$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \gamma \ge \alpha.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\beta = \alpha = \gamma$. Ως γνωστό,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n}^2} \to 0.$$

Συνεπώς

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \gamma.$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$|q_n - \alpha p_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Το

$$\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} > [\alpha_{n+1}]q_n + q_{n-1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}.$$

Συνεπώς

$$|q_n - \alpha p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Ισχύει

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+2}q_{n+1}+q_n)q_n}.$$

Το $a_{n+2} = [\alpha_{n+2}] \ge 1$. Επομένως,

$$|\alpha q_n - p_n| > \frac{1}{q_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}q_n} > \frac{1}{q_{n+1}+q_n} > \frac{1}{2q_{n+1}},$$

αφού $q_{n+1} > q_n$. □

Παρατήρηση 7.4.2. Προφανώς ισχύει

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n}, \text{ αφού } q_{n+1} > q_n.$$

Πόρισμα 7.4.3. *Για κάθε φυσικό αριθμό n, $n \geq 2$ ισχύουν οι σχέσεις*

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = a_n|q_n\alpha - p_n| + |q_{n+1}\alpha - p_{n+1}|,$$

$$|q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

και

$$a_n = \left[\frac{|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|}{|q_n\alpha - p_n|}\right]$$

Απόδειξη. Το

$$q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = (a_{n+1}q_n + q_{n-1})\alpha - (a_{n+1}p_n + p_{n-1}) = a_{n+1}(q_n\alpha - p_n) + (q_{n-1}\alpha - p_{n-1}).$$

Επομένως

$$(q_{n-1}\alpha - p_{n-1}) = (q_{n+1}\alpha - p_{n+1}) - a_{n+1}(q_n\alpha - p_n).$$

Από το πόρισμα 7.2.4 προκύπτει ότι τα $(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$ και $a_{n+1}(q_n\alpha - p_n)$ έχουν αντίθετα πρόσημα.

Άρα,

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = |q_{n+1}\alpha - p_{n+1}| + a_{n+1}|q_n\alpha - p_n|.$$

Από την πρόταση 7.4.1 προκύπτει ότι

$$0 < \left|\frac{q_{n+1}\alpha - p_{n+1}}{q_n\alpha - p_n}\right| < \frac{1/q_{n+2}}{1/(q_{n+1} + q_n)} = \frac{q_{n+1} + q_n}{q_{n+2}} = \frac{q_{n+1} + q_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} \leq 1,$$

αφού $a_{n+2} \geq 1$. Συνεπώς

$$a_n = \left[\frac{|q_{n+1}\alpha - p_{n-1}|}{|q_n\alpha - p_n|}\right].$$

□

Παρατήρηση 7.4.4. Το όριο των συγκλινόντων ενός απείρου (απλού) συνεχούς κλάσματος λέγεται *τιμή* αυτού.

Αν για παράδειγμα $\alpha = [1; 1, 1, 1, \ldots]$, τότε

$$\alpha = 1 + \frac{1}{[1; 1, 1, 1, \ldots]} = 1 + \frac{1}{\alpha},$$

οπότε

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

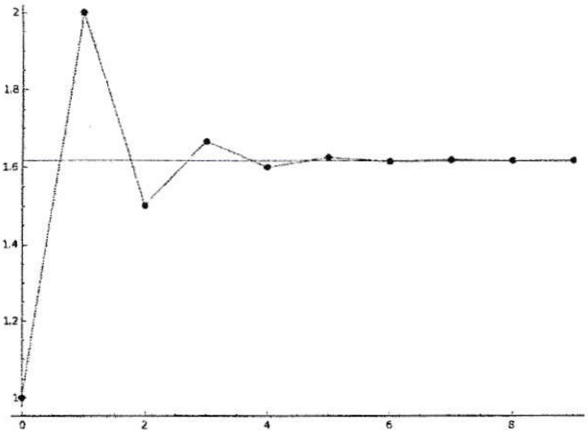
Οι συγκλίνοντες $\frac{p_n}{q_n}$ είναι το πηλίκο των αριθμών Fibonacci $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$.

Πράγματι, για $n = 0$, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = \frac{1}{1} = \frac{F_2}{F_1}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για k και για $k-1$, δηλαδή,

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} \text{ και } \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{F_{k+1}}{F_k}.$$

Σχήμα 7.4.1: Συγκλίνοντες στην χρυσή αναλογία.



Επειδή $(p_k, q_k) = 1$ και $(F_{k+2}, F_{k+1}) = 1$, έπεται ότι $p_k = F_{k+2}$ και $q_k = F_{k+1}$ καθώς και $p_{k-1} = F_{k+1}$ και $q_k = F_k$. Επομένως,

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{F_{k+2} + F_{k+1}}{F_{k+1} + F_k} = \frac{F_{(k+1)+2}}{F_{(k+1)+1}},$$

ισχύει και για $(k+1)$, άρα για κάθε φυσικό αριθμό n. Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

Στο πρόγραμμα sage παρακάτω υπολογίζουμε το συνεχές κλάσμα του αριθμού $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ακουλουθία των συγκλινόντων την οποία και ζωγραφίζουμε.

```
c=continued_fraction( (1+sqrt(5))/2)
v = [(i, c.convergent(i)) for i in range(10)]
P = point(v, rgbcolor=(0,0,1), pointsize=40)
L = line(v, rgbcolor=(0.5,0.5,0.5))
L2 = line([(0,c.value()),(10-1,c.value())], \
thickness=0.5, rgbcolor=(0.7,0,0))
(L+L2+P).show(xmin=0,ymin=1)
```

Πρόταση 7.4.5. *Κάθε άπειρο απλό συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε έναν άρρητο (πραγματικό) αριθμό.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή στο άτοπο.

Έστω $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, $a_i \in \mathbb{Z}$ και $a_i \geq 1$, για $i \geq 1$. Ο α είναι το όριο της ακολουθίας των συγκλινόντων. Από την πρόταση 7.4.1 προκύπτει ότι

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}.$$

Αν ο α ήταν ρητός, $\alpha = \frac{b}{c}$, $b, c \in \mathbb{Z}$, $(b, c) = 1$ τότε θα είχαμε

$$0 < |bq_n - cp_n| < \frac{c}{q_{n+1}q_n}.$$

Επειδή η $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία ακέραιων, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $c < q_{n+1}q_n$, δηλαδή $0 < |bq_n - cp_n| < 1$, άτοπο. □

Παρατήρηση 7.4.6. Από το πόρισμα 7.1.9 προκύπτει και η μοναδικότητα της παράστασης.

Παράδειγμα. Το συνεχές κλάσμα του

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1; \overline{1, 2}].$$

Σε επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε το συνεχές κλάσμα του e. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$

δηλαδή ότι $a_0 = 2$ και για κάθε $m \geq 1$, $a_{3m} = a_{3m-2} = 1$ ενώ $a_{3m+1} = 2m$.

Πρόταση 7.4.7 (Dirichlet). *Αν $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί p/q τέτοιοι ώστε*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Απόδειξη. Από την παρατήρηση 7.4.2 προκύπτει ότι για όλους τους κύριους συγκλίνοντες $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ ισχύει η σχέση. □

7.5 Η βέλτιστη προσέγγιση

Η θεωρία των συνεχών κλασμάτων αποτελεί μια εξαιρετική μέθοδο προσέγγισης πραγματικών αριθμών με ρητούς. Το γενικό πρόβλημα είναι το περιεχόμενο ενός κλάδου της θεωρίας αριθμών που λέγεται *Διοφαντική προσέγγιση* (Diophantine Approximation).

Η κλασική θεωρία της διοφαντικής προσέγγισης χρησιμοποιεί εκτός της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων και αυτές των σειρών Farey καθώς και το αξίωμα του Dirichlet ή αλλιώς το «αξίωμα του περιστερώνα».

Ορισμός 7.5.1. Το κλάσμα $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ λέγεται μία καλή προσέγγιση του $\alpha \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε q', $1 \leq q' < q$ και οποιοδήποτε p', ισχύει:

$$|q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|.$$

Παρατήρηση 7.5.2. Αν το p/q είναι μια καλή προσέγγιση του α τότε το p/q είναι ανάγωγο.

Απόδειξη. Αν $d := (p, q) > 1$ και $p = dp'$, $q = dq'$ τότε $1 < q' < q$ και

$$|q'\alpha - p'| < |q\alpha - p| = d|q'\alpha - p'|$$

άτοπο, αφού $d > 1$. □

Πρόταση 7.5.3. *Οι καλές προσεγγίσεις του $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ είναι οι συγκλίνοντες $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ του άπειρου απλού συνεχούς κλάσματος αυτού.*

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $n \geq 1$, αν ισχύει

$$|b\alpha - a| < |q_n\alpha - p_n|,$$

τότε κατάνάγκη $b \geq q_{n+1}$.

Απόδειξη. Στο πρώτο βήμα θα αποδείξουμε ότι μια καλή προσέγγιση του α είναι κατ' ανάγκη μια κύρια σύγκλιση του α.

Έστω λοιπόν ότι $\frac{a}{b}$ ανάγωγο κλάσμα ($a, b \in \mathbb{Z}$) με $b > 0$ το οποίο είναι μια καλή προσέγγιση του α. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\frac{a}{b} < \frac{p_0}{q_0} = a_0$, τότε

$$|\alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \Rightarrow |q_0\alpha - p_0| < |b\alpha - a|,$$

και επομένως ο $\frac{a}{b}$ δεν είναι καλή προσέγγιση του α.

Έστω τώρα ότι $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$. Επομένως

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{p_1}{q_1}\right| \geq \frac{1}{bq_1} \Rightarrow |b\alpha - a| > \frac{1}{q_1}.$$

Το

$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} \Rightarrow \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} - a_0 = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1q_0 - p_0q_1}{q_0q_1} = \frac{1}{q_0q_1}.$$

Ο α γράφεται

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Άρα

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} \geq \frac{1}{a_1} \geq |\alpha - a_0|,$$

άτοπο. Αν πάλι

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{a}{b} < \frac{p_n}{q_n},$$

τότε

$$\frac{1}{bq_{n-1}} \leq \left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_nq_{n-1}}.$$

Επομένως, $b > q_n$. Επίσης,

$$\frac{1}{bq_{n+1}} \leq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \Rightarrow |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \leq |b\alpha - a|,$$

και πάλι άτοπο.

Αποδείξαμε ότι κάθε καλή προσέγγιση του α θα πρέπει να είναι μια κύρια συγκλίνουσα αυτού. Το αντίστροφο θα το αποδείξουμε επαγωγικά.

Για $n = 0$, $\frac{p_0}{q_0} = a_0 \in \mathbb{Z}$ και το $q_0 = 1$, δηλαδή δεν υπάρχει q, $1 \leq q < q_0$. Συνεπώς η πρόταση είναι αληθής για $n = 0$.

Υποθέτουμε ότι είναι αληθής, για κάποιο $n \geq 0$, δηλαδή ότι ο $\frac{p_n}{q_n}$ είναι μια καλή προσέγγιση. Θα αποδείξουμε το ίδιο για τον $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Έστω q ο ελάχιστος ακέραιος $> q_n$ τέτοιος ώστε, για κάποιο p, να ισχύει

$$|q\alpha - p| < |q_n\alpha - p_n|.$$

Αν τώρα $1 < q' < q$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν $q' < q_n$, τότε σύμφωνα με την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής υπάρχει p', τέτοιο ώστε $|q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|$. Αν πάλι $q_n \le q' < q$, τότε $|q'\alpha - p'| \ge |q_n\alpha - p_n| > |q\alpha - p|$.

Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{p}{q}$ είναι επίσης μια καλή συγκλίνουσα. Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης θα πρέπει το $\frac{p}{q}$ να συμπίπτει με μια κύρια συγκλίνουσα. Εξ ορισμού του q, έπεται ότι $q = q_{n+1}$ και τελικά $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. □

Πόρισμα 7.5.4. *Αν $\frac{p}{q}$ είναι μια κύρια σύγκλιση του $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ και $m \in \mathbb{Z}$, $1 \le m < q$, τότε*

$$\frac{1}{2q} < |m\alpha - m'|,$$

για κάποιο $m' \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $q = q_n$. Είναι γνωστό από την πρόταση 7.4.1 ότι

$$\frac{1}{2q_n} < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|.$$

Από την πρόταση 7.5.3, έχουμε ότι ο $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ είναι μια καλή προσέγγιση του α. Επειδή $1 \le m < q_n$, έπεται ότι

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| < |m\alpha - m'|,$$

για κάποιο $m' \in \mathbb{Z}$. □

Πόρισμα 7.5.5. *Αν $\frac{a}{b}$ είναι ένα ανάγωγο κλάσμα, $b > 0$ και τέτοιο ώστε*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

τότε το $\frac{a}{b}$ είναι μια κύρια σύγκλιση του α.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 7.5.3 αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{a}{b}$ είναι μια καλή προσέγγιση του α. Έστω $\frac{c}{d}$ κλάσμα, $d > 0$, $\frac{c}{d} \ne \frac{a}{b}$ τέτοιο ώστε

$$|d\alpha - c| \le |b\alpha - a| < \frac{1}{2b}.$$

Το

$$\frac{1}{bd} \le \left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \le \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2d}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d} \Rightarrow b < d,$$

δηλαδή ο $\frac{a}{b}$ είναι μια καλή προσέγγιση του α. □

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ακριβέστερο φράγμα της ρητής προσέγγισης ενός πραγματικού (άρρητου) αριθμού α, φυσικά ως προς το μέγεθος του παρονομαστή του κλάσματος. Συγκεκριμένα ισχύει το:

Πρόταση 7.5.6 (Hurwitz). *Αν $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί $\frac{a}{b}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2\sqrt{5}}.$$

Απόδειξη. Αυτό που θα αποδείξουμε είναι ότι από τρεις, οποιουσδήποτε συγκλίνοντες του πραγματικού αριθμού α, τουλάχιστον ένας από αυτούς επαληθεύει την ανισότητα. Έστω

$$\ell_n := \frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Αν η προς απόδειξη ανισότητα δεν ισχύει για τους συγκλίνοντες $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ και $\frac{p_n}{q_n}$ θα αποδείξουμε ότι, σε ένα πρώτο βήμα, τότε κατ' ανάγκην

$$\ell_n + \ell_n^{-1} < \sqrt{5}.$$

Αφού για τους συγκλίνοντες $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ και $\frac{p_n}{q_n}$ δεν ισχύει η ανισότητα, έχουμε:

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q_{n-1}^2\sqrt{5}} + \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}}.$$

Ο α, ως γνωστόν βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ και $\frac{p_n}{q_n}$. Επομένως

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} \geq \frac{1}{q_{n-1}^2\sqrt{5}} + \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}},$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq \sqrt{5}.$$

Το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι ένας ρητός αριθμός, ενώ το δεξιό άρρητος. Επομένως

$$\ell_n + \ell_n^{-1} < \sqrt{5}.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα δεν ισχύει για τρεις διαδοχικούς συγκλίνοντες

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε

$$\ell_n + \ell_n^{-1} < \sqrt{5} \text{ και } \ell_{n+1} + \ell_{n+1}^{-1} < \sqrt{5}.$$

Επειδή $\ell_n > 1$ για κάθε n, από τις τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι

$$\ell_n^{-1} > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ και } \ell_{n+1} < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Όμως, το

$$\ell_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}{q_n} = a_{n+1} + \ell_n^{-1}.$$

Τελικά,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) > \ell_{n+1} = a_{n+1} + \ell_n^{-1} > a_{n+1} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \geq 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1),$$

άτοπο. □

Πρόταση 7.5.7. *Η σταθερά $\sqrt{5}$ είναι η βέλτιστη δυνατή.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός για τον οποίο η $\sqrt{5}$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε μεγαλύτερη τιμή. Πράγματι, έστω $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Το συνεχές κλάσμα του α είναι $[1; 1, 1, 1, 1 \ldots]$. Για κάθε $n \geq 0$, αποδεικνύεται επαγωγικά ότι αν $\alpha = [1; 1, \ldots, 1, \alpha_n]$, τότε $\alpha_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Παρατηρήστε ότι

$$\alpha_{n+1} = (\alpha_n - a_n)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Το $p_0 = q_0 = q_1 = 1$ και $p_1 = q_2 = 2$. Επίσης

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \text{ και } q_n = q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $q_n = p_{n-1}$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

Αν τώρα c είναι μια οποιαδήποτε σταθερά, $c > \sqrt{5}$, τότε η ανισότητα

$$\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > c,$$

ισχύει για πεπερασμένο (το πολύ) πλήθος τιμών του n. Επομένως, σύμφωνα με το πόρισμα 7.1.9

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{-(q_n p_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

οπότε η

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q^2\left(\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} < \frac{1}{cq_n^2}$$

ισχύει για πεπερασμένο πλήθος n.

Συνεπώς υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ρητοί $\frac{a}{b}$ οι οποίοι επαληθεύουν την ανισότητα

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{cb^2}.$$

Αφού $\frac{1}{cb^2} < \frac{1}{2b^2}$ και σύμφωνα με το πόρισμα 7.1.9, το κλάσμα $\frac{a}{b}$ συμπίπτει με κάποιον συγκλίνοντα $\frac{p_n}{q_n}$ του α. □

Παρατήρηση 7.5.8. Σύμφωνα με το θεώρημα του Hurwitz η διοφαντική ανισότητα

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{c}{y^n}$$

έχει άπειρο πλήθος λύσεων αν ο $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $n = 2$ και $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Τι γίνεται όμως αν $n > 2$; Το ερώτημα αυτό θα μας οδηγήσει σε επόμενο κεφάλαιο στη μελέτη των υπερβατικών αριθμών και την αποδειξη του πεπερασμένου των λύσεων κλάσεων διοφαντικών εξισώσεων.