Αγαπητοί φοιτητές,

Ξεκινάμε! Είχαμε μείνει στην

Πρόταση 6.1.8

Δεν νομίζω ότι αυτή έχει κάποια δυσκολία. Το σημαντικό είναι ότι η ακολουθία Fibonacci είναι περιοδική, αλλά περιοδική, αρχίζει από την αρχή η περίοδος.

Πρόταση 6.1.8. *Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci είναι περιοδική $(modm)$, για κάθε μη-μηδενικό φυσικό αριθμό m. Επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένας από τους $F_1, F_2, \ldots, F_{m^2}$ ο οποίος να είναι διαιρετός με m.*

Απόδειξη. Με $\overline{k}$, θα συμβολίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αντιπρόσωπο της κλάσης $k(modm)$ δηλαδή τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο $\overline{k} \equiv k(modm)$. Σχηματίζουμε τα ζευγάρια

$$\langle \overline{F}_1, \overline{F}_2 \rangle, \langle \overline{F}_2, \overline{F}_3 \rangle, \langle \overline{F}_3, \overline{F}_4 \rangle, \ldots, \langle \overline{F}_n, \overline{F}_{n+1} \rangle, \ldots$$

Το πλήθος των δυνατών, διαφορετικών μεταξύ τους, ζευγαριών είναι m^2. Έστω $\langle \overline{F}_k, \overline{F}_{k+1} \rangle$ το πρώτο ζευγάρι το οποίο εμφανίζεται στην ακολουθία για δεύτερη φορά. Θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι το $\langle \overline{1}, \overline{1} \rangle$. Αν ήταν κάποιο άλλο ζευγάρι, έστω το $\langle \overline{F}_k, \overline{F}_{k+1} \rangle$ για κάποιο $k > 1$ τότε θα υπήρχε $l > k$ τέτοιο ώστε

$$\langle \overline{F}_l, \overline{F}_{l+1} \rangle = \langle \overline{F}_k, \overline{F}_{k+1} \rangle.$$

Επειδή $F_{l-1} = F_{l+1} - F_l$ και $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ έπεται ότι $\overline{F}_{l-1} = \overline{F}_{k-1}$ δηλαδή

$$\langle \overline{F}_{l-1}, \overline{F}_l \rangle = \langle \overline{F}_{k-1}, \overline{F}_k \rangle.$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού το $\langle \overline{F}_k, \overline{F}_{k+1} \rangle$ είναι το πρώτο ζευγάρι το οποίο εμφανίζεται για δεύτερη φορά. Επομένως το $\langle \overline{1}, \overline{1} \rangle$ είναι το πρώτο επανεμφανιζόμενο ζευγάρι και συνεπώς η ακολουθία είναι περιοδική.

Από τη σχέση

$$\langle \overline{F}_t, \overline{F}_{t+1} \rangle = \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle.$$

έπεται ότι $F_t \equiv 1(modm)$ και $F_{t+1} \equiv 1(modm)$. Συνεπώς $F_{t-1} = F_{t+1} - F_t \equiv 0(modm)$,δηλαδή $m|F_{t-1}$.

□

2

Ορισμός 6.1.9. Ο δείκτης t του μικρότερου (θετικού) αριθμού Fibonacci F_t για τον οποίο ισχύει $m|F_t$, θα λέγεται *σημεία εισόδου* (entry point) του αριθμού m.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στην περίπτωση που ο m είναι πρώτος αριθμός.

Πρόταση 6.1.10. *Για κάθε πρώτο $p > 5$ ισχύει $p|F_{p-1}$ ή $p|F_{p+1}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τους τύπους του Binet

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\},$$

Υπολογίζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα των a^n και b^n, όπου $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, και αφαιρούμε. Συνεπώς έχουμε,

$$F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[1 + \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 + \ldots + \binom{n}{n}\sqrt{5}^n\right] +$$

$$-\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[1 - \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\sqrt{5}^n\right].(*)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (*) για $n = p$:

$$F_p = \frac{1}{2^{p-1}}\left[\binom{p}{1} + \binom{p}{3}5 + \binom{p}{5}5^2 + \ldots + \binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right].$$

Επειδή, ως γνωστό, ισχύει $\binom{p}{k} \equiv 0(\mathrm{mod} p)$ για κάθε k, $1 \le k \le p-1$ και, σύμφωνα με το μικρό Θεώρημα του Fermat, $2^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod} p)$ έπεται ότι

$$F_p \equiv 2^{p-1}F_p \equiv \binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod} p).$$

και αφού $p \neq 5$

Όμως, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, έχουμε $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{5}{p}) \equiv \pm 1(\mathrm{mod} p)$, δηλαδή $F_p^2 \equiv 1(mod p)$. Στη συνέχεια από τον τύπο του Cassini προκύπτει ότι

$$F_p^2 = F_{p-1}F_{p+1} + (-1)^{p-1} = F_{p-1}F_{p+1} + 1$$

ο οποίος ως ισοτιμία γράφεται $F_{p-1}F_{p+1} \equiv 0(\mathrm{mod} p)$, δηλαδή $p|F_{p-1}$ είτε $p|F_{p+1}$. Δεν είναι δυνατό ο p να διαιρεί και τους δύο συγχρόνως, διότι τότε θα διαιρούσε και τον $(F_{p-1}, F_{p+1}) = F_{(p-1,p+1)} = F_2 = 1$, άτοπο. □

Παρατήρηση. Βέβαια δεν είναι πάντοτε οι αριθμοί $p-1$ ή $p+1$ και σημεία εισόδου του πρώτου αριθμού p. Για παράδειγμα, ο $13|F_{14} = 377$ αλλά και $13|F_7 = 13$.

Εντελώς φυσικό θεωρείται το ερώτημα. Πότε ισχύει η μία διαιρετότητα και πότε η άλλη ; Είναι δυνατό να χαρακτηρίσουμε τις δύο περιπτώσεις; Η απάντηση είναι θετική. Εφαρμόζουμε τη σχέση (*) για $n = p + 1$ και έχουμε

$$2^pF_{p+1} = \left[\binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{3}5 + \binom{p+1}{5}5^2 + \ldots + \binom{p+1}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right].$$

(3)

Επειδή, $p|\binom{p+1}{k}$ για κάθε k, $3 \leq k \leq p-1$, έχουμε

$$2^p F_{p+1} \equiv 1 + (\frac{5}{p})(mod p).$$

Από την τελευταία ισοτιμία συμπεραίνουμε ότι,

$$p|F_{p+1} \text{ ακριβώς τότε όταν } (\frac{5}{p}) = -1.$$

Εδώ παρατηρείστε ότι $(\frac{5}{p}) = (\frac{p}{5})$ ✓

Η παραπάνω πρόταση μπορεί επομένως να γραφεί στη μορφή: ?

Πρόταση 6.1.11. *Αν p πρώτος, τότε ισχύει η ισοτιμία,* $F_{p-\varepsilon_p} \equiv 0(\text{mod} p)$, *όπου* $\varepsilon_p := (\frac{p}{5})$.

Απόδειξη. Η αλήθεια της πρότασης είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 6.1.8, του σχολίου που ακολούθησε και της επαλήθευσης ότι ισχύει και για $p = 2, 3, 5$. (Το σύμβολο $\varepsilon_p = (\frac{p}{5})$ είναι το σύμβολο Kronecker, για p περιττό ταυτίζεται με το σύμβολο του Legendre και για $p = 2$, $\left(\frac{5}{2}\right) = -1$.) □

Σημαντικό

Το ερώτημα είναι αν ισχύει και το αντίστροφο. Θα είχαμε ένα, ακόμη, κριτήριο πιστοποίησης πρώτων αριθμών. Θα ήταν πολύ ωραίο για να είναι αληθινό. Όμως ο αριθμός 323 δεν είναι πρώτος αλλά επαληθεύει το συμπέρασμα της πρότασης 6.1.11.

Ορισμός 6.1.12. Ένας φυσικός αριθμός n θα λέγεται *ψευδοπρώτος Fibonacci*, όταν επαληθεύει το συμπέρασμα της πρότασης 6.1.11 και είναι *σύνθετος*.

Το θέμα είναι πολύ ενδιαφέρον, αλλά θα επανέλθουμε σε επόμενη παράγραφο στην οποία θα το εξετάσουμε στη γενικότητά του.

Θα κλείσουμε την παράγραφο με μία ακόμη ιδιότητα της ακολουθίας.

Ορισμός 6.1.13. Μία ακολουθία θετικών ακέραιων θα λέγεται *πλήρης* όταν κάθε θετικός ακέραιος m μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα όρων της ακολουθίας και κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πολύ μία φορά στην παράσταση του m.

Πρόταση 6.1.14. *Η ακολουθία Fibonacci* F_n, $(n \geq 1)$ *είναι πλήρης.*

Εως εδώ αφήστε την απόδειξη

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.1.1,1. έχουμε

$$F_n - 1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-2}.$$

Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι για $3 \leq n \leq 6$ κάθε ακέραιος $m = 1, 2, 3, \ldots, F_n - 1$ μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα κάποιων εκ των αριθμών Fibonacci. Πράγματι για $n = 3$ έχουμε

$$F_n = F_3 = 2, F_{n-1} = F_2 = 1, F_{n-2} = F_1 = 1,$$

για $n = 4$ έχουμε

$$F_n = F_4 = 3, F_{n-1} = F_3 = 2, F_{n-2} = F_2 = 1,$$

δηλαδή $F_1 = 1, F_1 + F_2 = 2$ κ.λ.π.. Όμοια και για $n = 5$ και $n = 6$.
Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε ακέραιος $m = 1, 2, 3, \ldots, F_k - 1, (k \geq 3)$ μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα των αριθμών Fibonacci $F_1, F_2, \ldots, F_{k-2}$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε ακέραιος $m =$

Εισαγωγή στους αριθμούς Lucas

Έχουμε δει ότι οι αριθμοί του Fibonacci ορίζονται μέσω των ριζών μιας συγκεκριμένης εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού. Θα μπορούσαμε να κάνουμε το ίδιο για <u>άλλες</u> εξισώσεις δευτέρου βαθμού. ~~Πρ~~ Πριν όμως φτάσουμε εκεί θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τους δύο πρώτους όρους της αναδρομικής ακολουθίας. Αυτό έκανε ο <u>Lucas</u> κατά τον $19^{ο}$ αιώνα. Βέβαια η αλλαγή αυτή <u>δεν</u> ήταν εντελώς αυθαίρετη. Αυτό θα το δούμε σε λίγο, γιατί.

Έτσι έχουμε την <u>ακολουθία Lucas</u>

$L_0=2,\ L_1=1$ και $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

Έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της ακολουθίας Fibonacci

Αποδείξτε μερικές από τις

(6.3.1) — (6.3.10)

5

$1, 2, 3, \dots, F_{k+1} - 1$, μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα κάποιων από τους $F_1, F_2, \dots F_{k-1}, (k \geq 4)$. Αν σε κάθε δοσμένη παράσταση προσθέσουμε το F_{k-1} θα έχουμε

$$1 + F_{k-1}, 2 + F_{k-1}, \dots, F_k - 1 + F_{k-1} = F_{k+1} - 1.$$

Έτσι πετυχαίνουμε την παράσταση των διαδοχικών θετικών ακέραιων $1, 2, 3, \dots, F_k - 1$ και $1 + F_{k-1}, 2 + F_{k-1}, 3 + F_{k-1}, \dots, F_{k+1} - 1$. Δεν υπάρχουν παραλείψεις ανάμεσα στους $F_k - 1$ και $1 + F_{k-1}$ διότι για $k = 3$ έχουμε $F_k - 1 = 1$ και $1 + F_{k-1} = 2$, για $k = 4$ ισχύει $F_k - 1 = 2$ και $1 + F_{k-1} = 3$, ενώ για $k \geq 5$ ισχύει $F_k - 1 \geq 1 + F_{k-1}$,αφού $F_k - F_{k-1} \geq 2$.

□

6.2 Αριθμοί Lucas

Εάν τώρα αλλάξουμε τα αρχικά δεδομένα της ακολουθίας Fibonacci και θέσουμε $L_0 = 2$ και $L_1 = 1$, προκύπτει μία καινούρια αναδρομική ακολουθία η οποία ορίστηκε και μελετήθηκε αρχικά από τον Γάλλο μαθηματικό Francois Edouard Lucas (1842-1891). Μάλιστα πήρε το όνομά του.

Ορισμός 6.3.1. Η αναδρομική ακολουθία ακέραιων $L_0 = 2, L_1 = 1$ και $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέγεται *ακολουθία Lucas*.

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι ο Lucas ήταν ο πρώτος που ονόμασε την ακολουθία που μόλις μελετήσαμε, ακολουθία Fibonacci.

Για την ακολουθία Lucas ισχύουν ανάλογες ιδιότητες αυτής των αριθμών Fibonacci. Επεκτείνουμε την ακολουθία και προς τα αριστερά, για εκθέτες αρνητικούς ακέραιους. Θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες χωρίς απόδειξη. Ισχύουν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ο πρώτος είναι γνωστός ως τύπος Binet.

$$L_n = a^n + b^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{6.3.1}$$

$$F_{2n} = F_n L_n, \tag{6.3.2}$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \tag{6.3.3}$$

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \quad \text{(ορισμός για } n<0) \tag{6.3.4}$$

$$(L_{n+2}, L_{n+1}) = 1, \tag{6.3.5}$$

$$2 \mid L_n \Longleftrightarrow 3 \mid n, \tag{6.3.6}$$

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3, \tag{6.3.7}$$

$$L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2, \tag{6.3.8}$$

$$L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n, \tag{6.3.9}$$

$$(F_n, L_n) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } 3 \nmid n \\ 2, & \text{όταν } 3 \mid n \end{cases} \tag{6.3.10}$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι η ακολουθία Lucas $L_{n-1}, n \geq 0$ είναι πλήρης.

Πρόταση 6.3.2. *Για κάθε ακέραιο n, ισχύει,*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4. \tag{6.3.11}$$

6

Απόδειξη. Από τους τύπους του Binet $L_n = a^n + b^n$ και $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ έπεται ότι $a^n = \frac{1}{2}(L_n + F_n\sqrt{5})$ και $b^n = \frac{1}{2}(L_n - F_n\sqrt{5})$. Επομένως $\frac{1}{4}(L_n^2 - 5F_n^2) = (ab)^n$ οπότε και $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$. □

Σημείωση. Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Τα ζευγάρια

$$(L_n, F_n), n \in \mathbb{Z}$$

είναι λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$X^2 - 5Y^2 = 4(-1)^n.$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται *εξίσωση του Pell*, είναι πολύ σημαντική και θα μελετηθεί σε ξεχωριστό κεφάλαιο του δεύτερου μέρους.
Αργότερα θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αυτές είναι *όλες* οι λύσεις της εξίσωσης αυτής.

έως εδώ

Μια εικασία σχετικά με τους αριθμούς Fibonacci ήταν ότι οι μοναδικοί αριθμοί που είναι τέλειο τετράγωνο είναι οι 0, 1, 144. Η εικασία αυτή αποδείχθηκε από τον J.H.E.Cohn [2], [1] στα 1964. Για να την αποδείξουμε χρειαζόμαστε ακόμη μερικές ταυτότητες των αριθμών Fibonacci και Lucas.

$$\begin{aligned}
2F_{m+n} &= F_mL_n + F_nL_m, && (6.3.12)\\
2L_{m+n} &= 5F_mF_n + L_mL_n, && (6.3.13)\\
2 \mid L_m &\iff 3 \mid m, && (6.3.14)\\
3 \mid L_m &\iff m \equiv 2(mod4), && (6.3.15)
\end{aligned}$$

Οι επόμενες ισχύουν υπό τις προϋποθέσεις $2 \mid k$ και $3 \nmid k$

$$\begin{aligned}
L_k &\equiv 3(\text{mod}4), && (6.3.16)\\
L_{m+2k} &\equiv -L_m(\text{mod}L_k), && (6.3.17)\\
F_{m+2k} &\equiv -F_m(\text{mod}L_k), && (6.3.18)\\
L_{m+12} &\equiv L_m(\text{mod}8). && (6.3.19)
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Εδώ θα περιγράψουμε τις ιδέες των αποδείξεων των ιδιοτήτων αυτών. Οι πρώτες δύο αποδεικνύονται με τη βοήθεια των τύπων Binet. Οι επόμενες δύο όπως και οι αντίστοιχες για τους αριθμούς Fibonacci. Επειδή $3 \nmid k$, έπεται ότι $2 \nmid L_k$. Επομένως για $2 \mid k$ η (6.3.9) γράφεται $L_{\frac{k}{2}}^2 = L_k + 2(-1)^{\frac{k}{2}}$, και συνεπώς $L_k \equiv 3(\text{mod}4)$. Από την πρώτη σχέση προκύπτει για $n = 2k$ ότι

$$2F_{m+2k} = F_mL_{2k} + F_{2k}L_m = F_m(L_k^2 + (-1)^{k-1}2) + F_kL_kL_m \equiv -2F_m(\text{mod}L_k).$$

Επειδή $2 \nmid k$, έχουμε

$$F_{m+2k} \equiv -F_m(\text{mod}L_k).$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η (6.3.18). Τέλος, η (6.3.19) είναι απλή γενίκευση του γεγονότος ότι η ακολουθία Lucas είναι περιοδική (mod8) με μήκος περιόδου 12. □

Πρόταση 6.3.3. *1. Αν ο L_n είναι τέλειο τετράγωνο, τότε κατ' ανάγκη $n = 1$ ή $n = 3$.*

2. Αν ο L_n είναι το διπλάσιο τέλειου τετραγώνου, τότε κατ' ανάγκη $n = 0$ ή $n = \pm 6$.

Απόδειξη. 1. Αν ο n είναι άρτιος τότε η (6.3.9) δίνει

$$L_n = y^2 \pm 2 \neq x^2.$$

Αν $n \equiv 1(\text{mod}4)$, τότε $L_1 = 1$, ενώ αν $n \neq 1$, τότε γράφουμε $n = 1 + 2 \cdot 3^r \cdot k$ και από την (6.3.17) επεται ότι

$$L_n \equiv -L_1 \equiv -1(\text{mod}L_k),$$

οπότε για $L_n = x^2$ προκύπτει ότι $x^2 \equiv -1(\text{mod}L_k)$, η οποία, λόγω της (6.3.16), δεν έχει λύση.

Αν τώρα $n \equiv 3(\text{mod}4)$, τότε για $n = 3$ δίνει τη λύση $L_3 = 2^2$ ενώ για $n > 3$ γράφουμε $n = 3 + 2 \cdot 3^r \cdot k$ και έχουμε

$$L_n \equiv -L_3 \equiv -4(\text{mod}L_k),$$

από την οποία προκύπτει, όπως παραπάνω, ότι ο L_n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Αν ο n είναι περιττός και ο L_n άρτιος τότε, λόγω της (6.3.12) , έχουμε $n \equiv \pm 3(\text{mod}12)$. Από την (6.3.16), σε συνδυασμό με την (6.3.4), προκύπτει $L_n \equiv 4(\text{mod}8)$. Άν ήταν $L_n = 2x^2$ θα είχαμε $2x^2 \equiv 4(\text{mod}8)$, δηλαδή $x^2 \equiv 2(\text{mod}4)$, το οποίο είναι άτοπο.

Αν $n \equiv 0 \pmod 4$, τότε για $n = 0$ έχουμε τη λύση $L_0 = 2$, ενώ για $n \neq 0$ γράφουμε $n = 2 \cdot 3^r \cdot k$ και έχουμε

$$2L_n \equiv -2L_0 \equiv -4 \pmod{L_k}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $L_n = 2x^2$ τότε ο $2L_n = (2y)^2$ θα ήταν τέλειο τετράγωνο, το οποίο όμως, λόγω της (1.14), είναι αδύνατο.

Αν $n \equiv 6 \pmod 8$ τότε για $n = 0$, έχουμε τη λύση $L_6 = 2 \cdot 3^2$, ενώ για $n \neq 6$ γράφουμε $n = 6 + 2 \cdot 3^r \cdot k$ (όπου $4 \mid k, 3 \nmid k$) βρίσκουμε

$$2L_n \equiv -2L_6 \equiv -36(\text{mod}L_k)$$

από την οποία προκύπτει, όπως παραπάνω, ότι $L_n \neq 2x^2$.

Αν τέλος $n \equiv 2(mod8) \Longrightarrow n \equiv -6(mod8)$, τότε από τη σχέση (3), έπεται ότι έχουμε μία λύση για $n = -6$ και καμμία άλλη για τις υπόλοιπες τιμές του n.

□

Πρόταση 6.3.4. 1. *Αν ο F_n είναι τέλειο τετράγωνο τότε, κατ' ανάγκη, $n = 0, \pm 1, 2$ ή 12.*

2. *Αν $F_n = 2x^2$ τότε , κατ' ανάγκη $n = 0, \pm 3$, ή 6.*

Απόδειξη. Για το 1. Αν $n \equiv 1 \pmod 4$, τότε για $n = 1$ έχουμε τη λύση $F_1 = 1$ ενώ για $n \neq 1$ γράφουμε $n = 1 + 2 \cdot 3^r k$ και συνεπώς

$$F_n \equiv -F_1 \equiv -1 \pmod 4,$$

δηλαδή $F_n \neq x^2$.

Αν $n \equiv 3(mod4)$ από τη σχέση $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$ προκύπτει ότι $-n \equiv 1 \pmod 4$ και βρίσκουμε τη λύση $n = -1$.

Αν ο n είναι άρτιος, τότε λόγω της (1.1) $F_n = F_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n}{2}}$ και η (1.9) για $F_n = x^2$ και $3|n$ δίνει $F_{\frac{n}{2}} = 2y^2$ και $L_{\frac{n}{2}} = 2z^2$. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $\frac{n}{2} = 0, \pm 6$, δηλαδή ότι $n = 0, \pm 12$. Οι δύο τιμές $n = 0, 12$ δίνουν λύσεις της $F_{\frac{n}{2}} = 2y^2$ ενώ η $n = -12$ όχι. Αν τέλος ο n είναι άρτιος

Οι αρχαίοι Έλληνες όρισαν τους πολύγωνους ή πολυγωνικούς αριθμούς. Υποστηρίζεται ότι η θεωρία ανάγεται στον Πυθαγόρα.
Παρακαλώ να δείτε τις σελίδες 83 και 84.

Το ερώτημα, ποιοί αριθμοί Fibonacci είναι τρίγωνοι αριθμοί είναι 0, 1, 3, 21, 55.

Από τις ασκήσεις

1 και 10, θα λύσει ο Στέφανος
2, και 9, θα λύσει ή Σοφία
3 και 8, θα λύσει η Ζωή
4 και 7, θα λύσει ο Λευτέρης
5 και 6, θα λύσε η Ιωάννα.

Αυτά για την πρώτη μας επικοινωνία

9

και 3 δεν διαιρεί το n, τότε η (1.9) δίνει $F_{\frac{n}{2}} = y^2$ και $L_{\frac{n}{2}} = z^2$. Από την προηγούμενη πρόταση και πάλι έχουμε $\frac{n}{2} = 1, 3$, δηλαδή $n = 2, 6$. Η τιμή $n = 2$ δίνει λύση της $F_{\frac{n}{2}} = y^2$, ενώ η $n = 6$ όχι.

Για το 2. Έστω ότι $n \equiv 3(mod4)$. Αν $n = 3$ τότε έχουμε τη λύση $F_3 = 2$, ενώ για $n \neq 3$ με $n = 3 + 2 \cdot 3^r \cdot k$ με $2 \mid k$ και $3nok$ έχουμε

$$2F_{2n} \equiv -2F_3 \equiv -4(modL_k).$$

Έχουμε δει προηγουμένως ότι η $F_n = 2x^2$ δεν έχει λύση. Αν τώρα ο n είναι άρτιος, τότε από τη σχέση (1) $F_n = F_{\frac{n}{2}} L_{\frac{n}{2}}$ και την υπόθεση ότι $F_n = 2x^2$ προκύπτει $F_{\frac{n}{2}} = y^2$ και $L_{\frac{n}{2}} = 2z^2$. (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και το πρώτο μέρος του παρόντος η μοναδική λύση είναι $n = 0$) ή $F_{\frac{n}{2}} = 2y^2$ και $L_{\frac{n}{2}} = z^2$, οπότε και πάλι λόγω της προηγούμενης πρότασης έχουμε $\frac{n}{2} = 1$ ή 3. Για $n = 2$ δεν ισχύει $F_{\frac{n}{2}} = 2y^2$ η οποία ισχύει για $n = 6$. □

Πρόταση 6.3.5. *Οι μοναδικοί αριθμοί Fibonacci της μορφής $F_n = c^2 + 1$ είναι αυτοί με δείκτη $n = \pm 1, 2, \pm 3, \pm 5$.*

Το πρόβλημα του προσδιορισμού των τρίγωνων αριθμών οι οποίοι είναι συγχρόνως και αριθμοί Fibonacci απαντήθηκε. Συγκεκριμένα ισχύει:

Πρόταση 6.3.6. *Οι μοναδικοί αριθμοί Fibonacci οι οποίοι είναι και τρίγωνοι αριθμοί, είναι οι $0, 1, 3, 21, 55$.*

Απόδειξη. Δείτε το άρθρο [5]. □

Στα 1969 ο H.M. Stark διατύπωσε το πρόβλημα: «Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί Fibonacci της μορφής $F_n = \frac{1}{2}(X^3 - Y^3)$.» Ισχυρίστηκε μάλιστα ότι η απάντηση σ' αυτό είναι ισοδύναμη με ένα σημαντικό πρόβλημα αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών. Και αυτό το προβλημα είναι ανοιχτό.

6.3.1 Ασκήσεις

1. Αν $2 \mid F_n$, να αποδείξετε ότι $4 \mid (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2)$ και αν $3 \mid F_n$ τότε $9 \mid (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2)$

2. Για κάθε $n \geq 3$ ισχύει
$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_1^2 + F_2^2 + \cdots F_{n-2}^2).$$

3. Αν $m \geq 1, n \geq 1$ και $(m, n) = 1$, τότε $F_m F_n \mid F_{mn}$.

4. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει
$$2^{n-1} F_n \equiv n mod 5.$$

5. Να αποδείξετε ότι
$$F_{2n+2} F_{2n-1} - F_{2n} F_{2n+1} = 1, \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

6. Να αποδείξετε ότι

   (α') $F_{n+1}^2 - 4F_n F_{n-1} = F_{n-2}^2$ για κάθε $n \geq 3$

   (β') $F_{n+1} F_{n-1} - F_{n+2} F_{n-2} = 2(-1)^n$, για κάθε $n \geq 3$

   (γ') $F_n^2 - F_{n+2} F_{n-2} = (-1)^n$, για κάθε $n \geq 3$

(δ') $F_n^2 - F_{n+3}F_{n-3} = 4(-1)^{n+1}$, για κάθε $n \geq 4$

(ε') $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$, για κάθε $n \geq 2$

7. Αν $p \in \mathbb{P}$, $p = 4k + 3$ τότε η $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod p$ συνεπάγεται ότι $p \mid a$ και $p \mid b$ (Αποδείξτε το ή δεχτείτε το!). Να αποδείξετε ότι αν $p \in \mathbb{P}$, $p \equiv 3 \bmod 4$, τότε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $p \nmid F_{2n-1}$.

8. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $F_{2n-1}F_{2n+5}$ γράφεται ως άθροισμα δύο τετραγώνων.

9. Θεωρήστε κατάλληλη υπακολουθία της ακολουθίας Fibonacci και αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4k + 1$.

10. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = F_{2n+3}^2.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε 5 πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες. Τέλος να αποδείξετε ότι ο αριθμός $F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}$ είναι πάντοτε εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου.

6.4 Ακολουθίες Lucas.

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα. Οι τύποι Binet, τόσο των αριθμών Fibonacci όσο και των αριθμών Lucas, συνδέονται άμεσα με τους αριθμούς $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, οι οποίοι είναι οι ρίζες του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου $x^2 - x - 1$. Θεωρούμε λοιπόν δύο ακέραιους αριθμούς a, b διάφορους του μηδενός. Οι ρίζες του πολυωνύμου $x^2 - ax + b = 0$ είναι $\alpha = \frac{a+\sqrt{D}}{2}$ και $\beta = \frac{a-\sqrt{D}}{2}$, όπου $D = a^2 - 4b$ η διακρίνουσα του πολυωνύμου. Προκειμένου να αποφύγουμε την ιδιάζουσα περίπτωση της διπλής ρίζας, υποθέτουμε ότι η διακρίνουσα $D \neq 0$. Επομένως, $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = \sqrt{D}$ και $\alpha\beta = b$. Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε δύο ακολουθίες, $U_n = U_n(\alpha, \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ και $V_n = V_n(\alpha, \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$U_n = U_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ και } V_n = V_n(\alpha, \beta) = \alpha^n + \beta^n$$

Οι ακολουθίες $U = (U_n(\alpha, \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ και $V = (V_n(\alpha, \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέγονται (πρώτη και δεύτερη αντίστοιχα) *ακολουθίες Lucas* ως προς το ζευγάρι (α, β).

Είναι φανερό ότι, $U_0(\alpha, \beta) = 0$, $V_0(\alpha, \beta) = 2$ και $U_1(\alpha, \beta) = 1$, $V_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Επίσης εύκολα διαπιστώνεται ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύουν:

$$U_n(\alpha, \beta) = aU_{n-1} - bU_{n-2}, V_n(\alpha, \beta) = aV_{n-1} - bV_{n-2}.$$

Οι συνηθισμένοι αριθμοί Fibonacci και Lucas προκύπτουν ως ειδική περίπτωση (πρώτη και δεύτερη αντίστοιχα) της ακολουθίας Lucas ως προς το ζευγάρι $(a, b) = (1, -1)$.
Επεκτείνουμε τους δείκτες και για αρνητικούς ακέραιους έτσι ώστε οι αναδρομικοί τύποι να συνεχίσουν να ισχύουν: $U_{-n} = -\frac{1}{b^n}U_n$ και $V_{-n} = \frac{1}{b^n}V_n$, για κάθε $n \geq 1$.

Ιδιότητες Στη συνέχεια αναφέρουμε, χωρίς αποδείξεις, μερικές ιδιότητες των ακολουθιών