Δεν είναι ακριβώς σωστό όπως είναι γραμμένο.
Το σωστό είναι: $\forall x$ το σύνολο $\{\|T_N x\| : N \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.

Άσκηση 3

Η ακολουθία συναρτησοειδών $T_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ είναι από τον χώρο $l^2(\mathbf{N})$ στο $\mathbf{C}$ με νόρμα την απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού. Δηλαδή

$$||T_1 x|| = |a_1 x_1|, \quad ||T_2 x|| = |a_1 x_1 + a_2 x_2|, \ldots \quad ||T_N x|| = |\sum_{n=1}^{N} a_n x_n| \quad \checkmark$$

Και επειδή $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| < \infty$ θα έχω ότι το σύνολο $\{||T_N x||, x \in l^2(\mathbf{N}), N \in \mathbf{N}\}$ είναι φραγμένο. Από το θεώρημα $Banach-Steinhaus$ το σύνολο $\{||T_N|| = |\sum_{n=1}^{N} a_n|, N \in \mathbf{N}\}$ θα είναι φραγμένο, οπότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει.

Αυτό δεν προκύπτει από το προηγούμενο και δεν είναι σωστό. Αν πάρεις π.χ. $a_n = 1/n$ τότε ισχύουν οι υποθέσεις του προβλήματος (από Cauchy-Schwarz) αλλά δε συγκλίνει η $\sum a_n$.

Για την νόρμα του T:

$$||Tx|| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = ||a||||x||$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $||a|| < \infty$. Αν ισχύει τότε θα έχω $||T|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ και ότι η ακολουθία $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^2(\mathbf{N})$

αυτό δεν ισχύει, όπως γράφω πιο πάνω

Εδώ όμως έχουμε σύγκλιση της σειρας$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < \infty$ στην $||.||_1$. Πως θα δείξουμε σύγκλιση στην $||.||_2$;

Εδώ έχεις δείξει $Tx = \lim_N T_N x$ και $\|T_N\| \leq M, \forall N$. Άρα

$|Tx| = \lim_N |T_N x| \leq M \|x\|$, οπότε $\|T\| \leq M$.

Πάρε $x_N = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Αφού $|Tx| \leq M\|x\|, \forall x$

έχουμε $|Tx_N| \leq M \|x_N\|_2$ άρα

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq M \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

δηλ. $\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq M^2, \forall N$, άρα $(a_n) \in \ell^2$.