Άσκηση 3

Η ακολουθία συναρτησοειδών $T_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ είναι από τον χώρο $l^2(\mathbf{N})$ στο $\mathbf{C}$ με νόρμα την απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού. Δηλαδή

$$||T_1 x|| = |a_1 x_1|, \qquad ||T_2 x|| = |a_1 x_1 + a_2 x_2|, ... \qquad ||T_N x|| = |\sum_{n=1}^{N} a_n x_n|$$

Και επειδή $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| < \infty$ θα έχω ότι το σύνολο $\{||T_N x||, x \in l^2(\mathbf{N}), N \in \mathbf{N}\}$ είναι φραγμένο. Από το θεώρημα $Banach-Steinhaus$ το σύνολο $\{||T_N|| = |\sum_{n=1}^{N} a_n|, N \in \mathbf{N}\}$ θα είναι φραγμένο, οπότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει.

Για την νόρμα του T:

$$||Tx|| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = ||a|| ||x||$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $||a|| < \infty$. Αν ισχύει τότε θα έχω $||T|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ και ότι η ακολουθία $a = (a_1, a_2, ...) \in l^2(\mathbf{N})$

Εδώ όμως έχουμε σύγκλιση της σειρας$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < \infty$ στην $||.||_1$. Πως θα δείξουμε σύγκλιση στην $||.||_2$;