ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2019-20
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Έστω $K \leq K(a)$ μια επέκταση σωμάτων με $[K(a) : K] = n$. Όπως είδαμε στο μάθημα το $K(a)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα K.
α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi_a : K(a) \to K(a)$ με $\phi_a(e) = ae$ είναι μια K-γραμμική απεικόνιση.
β) Δείξτε ότι το a είναι ρίζα τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου τής ϕ_a. Ποιά είναι επομένως η σχέση τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου τής ϕ_a με το $\mathrm{Irr}(a, K)$;
γ) Βρείτε ένα μονικό πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$ πού έχει ως ρίζα το $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ (Υπόδειξη: δείξτε πρώτα με ένα σύντομο επιχείρημα ότι $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) : \mathbb{Q}] = 3$).

Πρόβλημα 2. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E για το πολυώνυμο $x^{p^m} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$, $p =$ πρώτος αριθμός. Ποιός είναι ο βαθμός τής επέκτασης $E/\mathbb{Z}_p$;

Πρόβλημα 3. Δίδεται το πολυωνύμου $f(x) = x^3 + 6x - 14 \in \mathbb{Q}[x]$.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$ και δύο καθαρά μιγαδικές ρίζες $b, \bar{b} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
β) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q})$ τού a πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}$.
γ) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(\sqrt{a}, \mathbb{Q})$ τού $\sqrt{a}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}$.
δ) Δείξτε ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου προς a.
ε) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(b, \mathbb{Q}(a))$ τού b πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}(a)$.

Πρόβλημα 4. Έστω E ένα σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Βρείτε τον βαθμο τής επέκτασης $[E : \mathbb{Z}_2]$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε ένα σώμα ριζών E και τόν αντίστοιχο βαθμό τής επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$ για τά πολυώνυμα:
α) $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$
β) $x^5 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 6. Έστω F σώμα χαρακτηριστικής p πρώτος και $f(x) \in F[x]$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο. Δείξτε ότι τό $f(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x) = g(x^{p^m})$, όπου $g(x) \in F[x]$ ανάγωγο διαχωρίσιμο πολυώνυμο. Δείξτε, επομένως, ότι κάθε ρίζα τού $f(x)$ έχει πολλαπλότητα p^m.