UNIVERSITY OF CRETE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND APPLIED MATHEMATICS
NUMBER THEORY - MEM204 (SPRING SEMESTER 2019-20)
INSTRUCTOR: G. KAPETANAKIS

FINAL EXAM – SEPTEMBER 2020

1. i. Show that $30 \mid n^5 - n$, for every $n \in \mathbb{Z}$.

   ii. Show that for every $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$(2^m + 3^m, 2^{m+1} + 3^{m+1}) = 1.$$

2. i. Prove that

$$\sum_{d \mid n} \mu(d)\tau(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{if } n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}. \end{cases}$$

   ii. Find the residue of 2020^{2021} divided by 9.

3. Solve

$$4x^{19} + 10x^{13} + 7x^{10} + 3x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{15}.$$

4. Examine whether the equation

$$23x^2 - 17y^2 + 5z^2 = 0$$

   has non-trivial integer solutions.

---

1. Each question is worth 2.5 points and the maximum score is 10 points.
2. The duration of the exam is 1.5 hours.
3. During the exam you are not allowed to have any bags, notes, books or electronics (calculators, mobiles, tablets, laptops etc.) on or next to you.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΜΕΜ204 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-20)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

1. i. Δείξτε ότι $30 \mid n^5 - n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

   ii. Δείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$(2^m + 3^m, 2^{m+1} + 3^{m+1}) = 1.$$

2. i. Απόδείξτε ότι

$$\sum_{d \mid n} \mu(d)\tau(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}. \end{cases}$$

   ii. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης 2020^{2021} δια 9.

3. Λύστε την ισοτιμία

$$4x^{19} + 10x^{13} + 7x^{10} + 3x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{15}.$$

4. Εξετάστε κατά πόσο η εξίσωση

$$23x^2 - 17y^2 + 5z^2 = 0$$

   έχει μη-τετριμμένες ακέραιες λύσεις.

---

1. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2,5 βαθμούς και μέγιστη βαθμολογία είναι το 10.
2. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1,5 ώρα.
3. Κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται να έχετε πάνω σας ή δίπλα σας τσάντες, σημειώσεις, βιβλία ή ηλεκτρονικές συσκευές (αριθμομηχανές, κινητά, ταμπλέτες, φορητούς υπολογιστές κτλ.).