Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

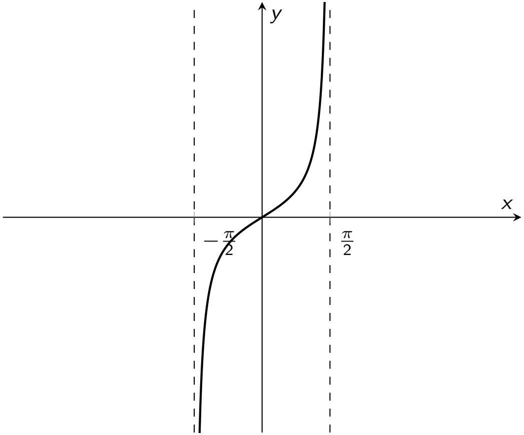
(i) **Να αποδείξετε ότι $|(-1,1)| = |\mathbb{R}|$**

Αρκεί να βρουμε μία $f : (-1,1) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί

Ορίζουμε $f : (-1,1) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan(x\frac{\pi}{2})$

η οποία είναι πράγματι 1-1 και επί



(ii) **Να αποδείξετε ότι $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$**

Αρκεί να βρουμε μία $f : (0,1) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{R}$

Βρισκουμε μία $g : (0,1) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ➠ $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$

Παίρνουμε την $f(x) = \tan(g(x)) : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 και επί (ως σύνθεση 1-1 και επί συναρτησεων)

(ii′) **Να αποδείξετε ότι $|(\alpha, \beta)| = |\mathbb{R}|$**

Βρισκουμε μία $g : (0,1) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} (\alpha, \beta)$ ➠ $g(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$

(iii) Να αποδείξετε ότι $|[0,1]| = |(0,1)|$

Δείχνουμε ότι $|(0,1)| \leq |[0,1]|$

$(0,1) \subseteq [0,1]$ αρα $|(0,1)| \leq |[0,1]|$

Δείχνουμε ότι $|[0,1]| \leq |(0,1)|$

αρκεί να βρουμε μία $f : [0,1] \xrightarrow{\text{1-1}} (0,1)$

π.χ. $f(x) = 0.5x + 0.25$

$f([0,1]) = [0.25, 0.75] \subseteq (0,1)$

αρα $|[0,1]| \leq |(0,1)|$

(iii′) Να αποδείξετε ότι $|(0,1]| = |(0,1)|$

Δείχνουμε ότι $|(0,1]| \leq |[0,1]|$

$(0,1] \subseteq [0,1]$ αρα $|(0,1]| \leq |[0,1]|$

Δείχνουμε ότι $|[0,1]| \leq |(0,1]|$

αρκεί να βρουμε μία $f : [0,1] \xrightarrow{\text{1-1}} (0,1]$

π.χ. $f(x) = 0.5x + 0.25$

$f([0,1]) = [0.25, 0.75] \subseteq (0,1]$

αρα $|[0,1]| \leq |(0,1]|$

(iv) Να αποδείξετε ότι $|(-1,0)\cup(0,1)| = |\mathbb{R}|$

Δείχνουμε ότι $|(-1,0)\cup(0,1)| \leq |\mathbb{R}|$

$(-1,0)\cup(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ αρα $|(-1,0)\cup(0,1)| \leq |\mathbb{R}|$

Δείχνουμε ότι $|\mathbb{R}| \leq |(-1,0)\cup(0,1)|$

$(0,1) \subseteq (-1,0)\cup(0,1)$ αρα $|(0,1)| \leq |(-1,0)\cup(0,1)|$

Ομως $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ επομένως $|\mathbb{R}| \leq |(-1,0)\cup(0,1)|$

(iv′) Να αποδείξετε ότι $|(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)| = |\mathbb{R}|$

Δείχνουμε ότι $|(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)| \leq |\mathbb{R}|$

$(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8) \subseteq \mathbb{R}$ αρα

$|(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)| \leq |\mathbb{R}|$

Δείχνουμε ότι $|\mathbb{R}| \leq |(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)|$

$(3,4) \subseteq (-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)$

αρα $|(3,4)| \leq |(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)|$

Ομως $|(3,4)| = |\mathbb{R}|$

επομένως $|\mathbb{R}| \leq |(-2,1)\cup(3,4)\cup(5,8)|$

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι (απειρα) αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

αριθμησιμό, διότι $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

(ii) $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ είναι πρώτος}\}$

$P \subseteq \mathbb{N}$ ➠ $|P| \leq |\mathbb{N}|$

Υπάρχει άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του P ➠ $|\mathbb{N}| \leq |P|$

διότι (θυμηθείτε την επαγωγική απόδειξη):

αν $p_1, p_2, \ldots, p_n$ πρώτοι, τότε ο $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ είναι επίσης πρώτος

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(iii) $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Q} & \Rightarrow & |\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+ & \Rightarrow & |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}^+| \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$$

<u>αλλος τρόπος:</u> θυμηθείτε την απόδειξη ότι $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$$\begin{array}{cccccc} 1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & \dots \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & \dots \\ 4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & \dots \\ 5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι (άπειρα) αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10^{-10000}\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10^{-10000}\} = (0, 10^{-10000})$

εχουμε δείξει οτι για κάθε διάστημα στο $\mathbb{R}$ ισχύει $|(0, 10^{-10000})| = |\mathbb{R}|$

(v) $\mathbb{C}$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ αρα $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{C}|$ αρα $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{C}|$

(vi) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2^a 3^b,$ για κάποια $a, b \in \mathbb{N}\}$.

$$
\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2^a 3^b,\ \text{για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 2^{a/2} 3^{b/2},\ \text{για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2^{a/2} 3^{b/2},\ \text{για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = -2^{a/2} 3^{b/2},\ \text{για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\} \\
&\xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

Αρα $|A| = |(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| =$ αριθμήσιμο, ως πεπερασμένη ενωση αριθμήσιμων συνόλων

Προσέξετε ότι η άσκηση ζητάει να μετρήσετε το πλήθος των διαστημάτων και όχι το πλήθος των στοιχείων των διαστημάτων.

(i) **Αποδείξτε οτι κάθε σύνολο διαστημάτων με ρητά άκρα στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.**

Το σύνολο όλων των διαστημάτων με ρητά άκρα είναι

$$\Delta = \left\{ \delta : \ \delta = (q,q') \ \text{ή} \ \delta = [q,q') \ \text{ή} \ \delta = (q,q'] \ \text{ή} \ \delta = [q,q'] \ \text{με} \ q \le q' \in \mathbb{Q} \right\}$$
$$= \{\delta : \delta = (q,q'), q \le q' \in \mathbb{Q}\} \cup \{\delta : \delta = [q,q'), q \le q' \in \mathbb{Q}\} \cup \{\delta : \delta = (q,q'], q \le q' \in \mathbb{Q}\} \cup \{\delta : \delta = [q,q'], q \le$$

$|\Delta| =$ απειρο αριθμήσιμο

(i′) **Αποδείξτε οτι κάθε σύνολο ανοικτων διαστημάτων με ρητά άκρα στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.**

Το σύνολο όλων των ανοικτων διαστημάτων με ρητά άκρα είναι $S = \left\{ \delta : \ \delta = (q,q') \ \text{με} \ q < q' \in \mathbb{Q} \right\}$

Η συναρτηση $f : S \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ με $f((q,q')) = (q, q'-q)$ είναι 1-1 και επί

αρα $|S| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$, δηλαδη απειρο αριθμήσιμο

Επομενως, και οποιοδήποτε υποσύνολο του S θα είναι αριθμήσιμο

Προσέξετε ότι η άσκηση ζητάει να μετρήσετε το πλήθος των διαστημάτων και όχι το πλήθος των στοιχείων των διαστημάτων.

(ii) **Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.**

Το ζητούμενο σύνολο είναι της μορφής $S \subseteq \left\{\delta : \delta = (r, r') \text{ ή } \delta = [r, r') \text{ ή } \delta = (r, r'] \text{ ή } \delta = [r, r'] \text{ με } r \leq r' \in \mathbb{R}\right\}$

με την ιδιότητα αν $\delta_1 \in S$ και $\delta_2 \in S$ τότε $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f : S \to \mathbb{Q}$ με $f(\delta) =$ κάποιο ρητο $q \in \delta$

Η f είναι καλά ορισμένη και 1-1

Αρα $|S| \leq |\mathbb{Q}|$, δηλαδή το σύνολο S είναι αριθμήσιμο

Θεωρήστε το σύνολο S των σφαιρών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ των οποίων τα κέντρα έχουν ρητές συντεταγμένες και των οποίων η ακτίνα είναι ρητός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο S είναι αριθμήσιμο.

Υπάρχει $f : S \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$f(S) = ((c_1, c_2, c_3), r)$, όπου $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι το κεντρο της σφαίρας S και $r \in \mathbb{Q}$ η ακτίνα της

Αρα $|S| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

(i) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο αριθμήσιμο σύνολο; (Οι λέξεις δεν είναι κατ΄ ανάγκη υπαρκτές.)

Το ζητούμενο σύνολο είναι η ενωση $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i$, όπου $\Lambda_i =$ το σύνολο των λέξεων μήκους i με γραμματα του ελληνικού αλφαβήτου

$|\Lambda_i| = 24^i$ ➠ Λ_i πεπερασμένο (αριθμήσιμο)

αρα $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i$ είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα αριθμήσιμό σύνολο

(ii) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε από ένα αριθμήσιμο-άπειρο αλφάβητο (π.χ. $\mathbb{N}$) αριθμήσιμο σύνολο;

(ii) **Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε από ένα αριθμήσιμο-άπειρο αλφάβητο (π.χ. $\mathbb{N}$) αριθμήσιμο σύνολο;**

Το ζητούμενο σύνολο είναι η ενωση

$$\Lambda = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i$$

όπου $\Lambda_i =$ το σύνολο των λέξεων μήκους i με γραμματα απο το αλφάβητο $\mathbb{N}$

$|\Lambda_i| = ?$

$$\Lambda_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Lambda_{ij}, \quad \text{οπου} \quad \Lambda_{ij} = \text{ λεξεις μηκους } i \text{ από το αλφάβητο } \{1, 2, \ldots, j\}$$

➠ $\Lambda_i =$ αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων (αριθμήσιμων) συνόλων

➠ $\Lambda_i =$ αριθμήσιμο

➠ $\Lambda = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i$ αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων (αριθμήσιμων) συνόλων

➠ $\Lambda =$ αριθμήσιμο