Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

- *Τι είναι το άπειρο;* κάτι μεγαλύτερο από κάθε φυσικό αριθμό

π.χ. πόσοι πολλοί ρητοί αριθμοί υπάρχουν;

Απειροι. Τόσοι όσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί

π.χ. πόσοι πολλοί πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν;

Απειροι. Είναι τόσοι όσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί; Είναι περισσότεροι;

Τι σημαίνει περισσότεροι όταν έχουμε απειρα στοιχεια;

- Δεν υπάρχει μόνο ένα, αλλά πολλά άπειρα!
- Αντί να ρωτάμε 'πόσα' στοιχεία υπάρχουν σε ένα σύνολο, είναι πολύ πιο αποτελεσματικό να συγκρίνουμε δύο σύνολα, και να ρωτάμε εάν υπάρχει το ίδιο πλήθος στοιχείων στα δύο.
- Λέμε οτι τα σύνολα A και B *εχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων* εάν υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$

- Λέμε οτι τα σύνολα A και B *εχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων* εάν υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$
- Ενα σύνολο A είναι *πεπερασμένο*, αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} [n]$
- Ενα σύνολο A είναι *αριθμήσιμο* αν είτε είναι πεπερασμένο είτε υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{N}$
- Αν υπάρχει $f : A \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{N}$ τότε λέμε ότι το A έχει $\aleph_0$ πλήθος στοιχείων

π.χ. Το $\mathbb{N}_0$ είναι αριθμήσιμο

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ με $f(n) = n - 1$. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

π.χ. (Γαλιλαίος, 1638) Υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμών και των τελείων τετραγώνων:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

- Το $\mathbb{N}$ είναι *γνήσιο υποσύνολο* του $\mathbb{N}_0$, άρα διαισθητικά θα έπρεπε να έχει λιγότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$
- Το $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ είναι *γνήσιο υποσύνολο* του $\mathbb{N}$ άρα διαισθητικά θα έπρεπε να έχει λιγότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$
- όμως με την έννοια της ύπαρξης αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης, τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων

- Cantor (1870): αν ερμηνεύσουμε ‘το ίδιο πλήθος στοιχείων’ να σημαίνει ‘υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση μεταξύ δύο συνόλων’, τότε κάθε άπειρο σύνολο έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με ένα γνήσιο υποσύνολό του!
- Εδώ άπειρο εννοείται ένα σύνολο B το οποίο δεν είναι ουτε κενό ούτε πεπερασμένο.

  Δηλ. $B \neq \emptyset$ και δεν υπάρχει συνάρτηση $f : [n] \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$, για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$

  Πρόταση:

  Αν ένα σύνολο B είναι άπειρο, τότε υπάρχει ένα γνήσιο υποσύνολο $A \subset B$ και μία συνάρτηση $f : B \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} A$.

  Αποδ. κατασκευαζουμε ενα άπειρο υποσύνολο X του B ως εξής:

  Αφού το B δεν είναι κενό, υπάρχει κάποιο στοιχείο στο B, το οποίο ονομάζουμε x_1.

  Αν έχουμε επιλέξει τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$, αφού δεν υπάρχει $\phi : [n] \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$, πρέπει να υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του B, το οποίο ονομάζουμε x_{n+1}, και το οποίο είναι διαφορετικό από τα $x_1, \dots, x_n$.

  Ορίζουμε $X := \{x_n \in B \mid n \in \mathbb{N}\}$

  Θεωρούμε το σύνολο $A = B \setminus \{x_1\}$ και ορίζουμε $f : B \to A$ με $\begin{array}{ll} f(x_n) = x_{n+1} & \text{για } x_n \in X \\ f(b) = b & \text{για } b \notin X \end{array}$

  Η συνάρτηση $f : B \to A$ είναι αμφιμονοσήμαντη και $A \subset B$

- Ο Cantor έλυσε το πρόβλημα του απείρου εισάγοντας την έννοια του *πληθικού αριθμού*
- το X και το Y έχουν τον ίδιο *πληθικό αριθμό* αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} Y$
- συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό (ή πληθάριθμο) του X με $|X|$ ή $card(X)$ ή $\#X$
- Για πεπερασμένα σύνολα, αν υπάρχει $f : [n] \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} X$, ο πληθικός αριθμός του X είναι n
- Αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} X$, λέμε οτι ο πληθικός αριθμός του X είναι $\aleph_0$
- Για άλλα άπειρα σύνολα μπορεί να χρειαστούμε νέα σύμβολα για τους πληθικούς αριθμούς τους

Παρατηρήσεις/Ιδιότητες

- Αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} Y$ τότε $|X| = |Y|$
- Αν υπάρχει μία 1-1 συνάρτηση $f : X \to Y$ τότε θα λέμε οτι $|X| \leq |Y|$
- Αν $X \subseteq Y$ τότε $|X| \leq |Y|$

  διότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = x$ είναι 1-1
- Αν $|X| \leq |Y|$ και $|X| \neq |Y|$ τότε $|X| < |Y|$
- Αν $|X| \leq |Y|$ και $X \neq Y$ τότε δεν ισχύει πάντα ότι $|X| < |Y|$

  διοτι, για άπειρα σύνολα δείξαμε ότι υπάρχει γνήσιο άπειρο υποσύνολο

- Για κάθε άπειρο σύνολο B μπορούμε να επιλέξουμε ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο $X \subseteq B$
- Αρα, $\aleph_0 = |X| \leq |B|$, και συνεπώς ο $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθικός αριθμός
- Πολλά σύνολα, που φαίνεται να είναι πολύ μεγαλύτερα από το $\mathbb{N}$, έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό $\aleph_0$.

π.χ. Το σύνολο των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με

$$f(n) = \begin{cases} k & \text{εάν} \quad n = 2k \\ 1 - k & \text{εάν} \quad n = 2k - 1 \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad g(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$$

και έχουμε την αντιστοιχία

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

➠ αν και f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, δεν διατηρεί τη διάταξη: $m < n$ δεν συνεπάγεται οτι $f(m) < f(n)$

Πρόταση: **Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.**

Ένας τρόπος να απαριθμήσουμε τους θετικούς ρητούς είναι να γράψουμε όλα τα κλάσματα σε ένα πίνακα και διαβάζουμε κατά μήκος ‘χιαστί διαγωνίων’

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

παίρνουμε μια ακολουθία στην οποία περιέχονται όλοι οι ρητοί με επαναλήψεις

$1/1,\ 1/2,\ 2/1,\ 1/3,\ 2/2,\ 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 5/5, 2/4, 3/3, 4/2, 4/1, 1/5, 2/4, 3/3, 4/2/, 5, 1, \ldots$

διαγράφουμε τις επαναλήψεις

$1,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ 3,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4, 1/5,\ 5, \ldots$

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & \dots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & \dots \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & \dots \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

διαγράφουμε τις επαναλήψεις

$1,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ 3,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4, 1/5,\ 5, \dots$

Ονομάζουμε το n-οστό αριθμό στην εναπομείνασα ακολουθία a_n, και ορίζουμε τη συνάρτηση f από τους φυσικούς στους θετικούς ρητούς με $f(n) = a_n$.

Ολοι οι ρητοί

$$0,\ a_1,\ -a_1,\ a_2,\ -a_2, \dots,\ a_n,\ -a_n,\ \dots$$

Η συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ που ορίζεται ως $g(k) = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad k = 1 \\ a_n & \text{εάν} \quad k = 2n \\ -a_n & \text{εάν} \quad k = 2n+1 \end{cases}$ είναι 1-1 και επί

Πρόταση: **Κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.**

Εστω A αριθμήσιμο σύνολο. Αν το A είναι πεπερασμένο, η πρόταση είναι προφανής

Αν το A είναι άπειρο αριθμήσιμό, τότε υπάρχει $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} A$

Εστω $B \subseteq A$, τότε

- είτε το B είναι πεπερασμένο ➠ αριθμήσιμο
- είτε το B είναι άπειρο ➠ μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} B$

Η συναρτηση g θα είναι η εξής:

$g(1) = f(m)$ όπου m είναι το ελάχιστο $m \in \mathbb{N}$ για το οποίο $f(m) \in B$

αν έχουμε ορίσει τα $g(1), g(2), \ldots, g(n)$, τότε

$g(n+1) = f(m)$ όπου m είναι το ελάχιστο $m \in \mathbb{N}$ για το οποίο $f(m) \in B \setminus \{g(1), \ldots, g(n)\}$.

π.χ.	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$	$f(11)$	$f(12)$	$\cdots\cdots$
	$\notin B$	$\notin B$	$\in B$	$\notin B$	$\in B$	$\notin B$	$\notin B$	$\in B$	$\in B$	$\in B$	$\notin B$	$\in B$	$\cdots\cdots$
			$g(1)$		$g(2)$			$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$		$g(6)$	$\cdots\cdots$

Πρόταση **Η ένωση μίας αριθμήσιμης οικογένειας αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.**

Αποδ. Αφού κάθε A_n είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία του A_n σε μία γραμμή,

$$a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}, \ldots$$

η γραμμή θα τελειώνει αν το A_n είναι πεπερασμένο, ενώ θα είναι μία άπειρη ακολουθία αν το A_n είναι άπειρο αριθμήσιμο.

καταγράφουμε τα στοιχεία του $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ σε ένα πίνακα και τα διαβάζουμε κατα μήκος των χιαστί διαγωνίων

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \qquad \text{δηλ. } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \ldots.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Μπορεί να υπάρχουν κενά στον πίνακα (πεπερασμένα σύνολα)} \\ \text{Μπορεί να υπάρχουν επαναλήψεις (κοινά στοιχεία)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{προσπερνάμε τα κενά και} \\ \text{τα στοιχεία που έχουν ήδη εμφανιστεί} \end{matrix}$$

Τελικά έχουμε είτε μία πεπερασμένη ακολουθία, είτε μία άπειρη ακολουθία χωρίς επαναλήψεις

αρα η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο

Πρόταση Το καρτεσιανό γινόμενο δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Εάν A και B είναι αριθμήσιμα, γράφουμε
$$\begin{array}{llllll} A: & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, & \ldots \\ B: & b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_n, & \ldots \end{array}$$

Γράφουμε τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ σε ένα πίνακα και τα διαβάζουμε κατα μήκος των χιαστί διαγωνίων

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \ldots \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \ldots \\ (a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

➠ Αν ένα από τα A ή B είναι πεπερασμένο, θα υπάρχουν κενά, τα οποία παραλείπουμε.

➠ Αν και τα δύο είναι πεπερασμένα, το γινόμενο $A \times B$ είναι πεπερασμένο.

➠ Αν και τα δύο είναι άπειρα, η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} A \times B$ που προκύπτει διαβάζοντας χιαστί είναι:

Η n-οστή διαγώνιος εχει n στοιχεία ➠ στις n πρώτες διαγώνιους υπάρχουν $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$ στοιχεία

Το r-οστό στοιχείο στην επόμενη χιαστί διαγώνιο είναι το (a_r, b_{n+2-r}),

$$f(m) = (a_r, b_{n+2-r}) \text{ όπου } m = \frac{n(n+1)}{2} + r \text{ για } 1 \le r \le n+1$$

π.χ. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου με ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

π.χ. Το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ με ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Ασκ. Θεωρήστε το σύνολο S των σφαιρών στο $\mathbb{R}^3$ των οποίων τα κέντρα έχουν ρητές συντεταγμένες, και των οποίων η ακτίνα είναι ρητός αριθμός. Δείξτε οτι το S είναι αριθμήσιμο.

Υπάρχει $f : S \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$f(S) = ((c_1, c_2, c_3), r)$, όπου $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι το κεντρο της σφαίρας S και $r \in \mathbb{Q}$ η ακτίνα της

Αρα $|S| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Πρόταση Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \mathbb{R}$ και καταλήγουμε σε άτοπο

Αν $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, γράφουμε κάθε αριθμό $f(m) \in \mathbb{R}$ σε δεκαδική παράσταση

$$f(m) = a_m,\, a_{m\,1}\, a_{m\,2}\, a_{m\,3}\, \dots\, a_{m\,n}\, \dots, \quad \text{όπου } a_m \in \mathbb{Z} \text{ και } \ a_{m\,n} \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

π.χ. αν $f(m) = \sqrt{2} = 1,41421356...$ τότε $a_m = 1,\ a_{m\,1} = 4,\ a_{m\,2} = 1,\ a_{m\,3} = 4,\ a_{m\,4} = 2,\ \dots$

π.χ. αν $f(m)$ είναι δεκαδικό κλάσμα, η ακολουθία τελειώνει με μηδενικά

Δηλ. έχουμε μία ακολουθία

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & a_1,\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots \\ f(2) & = & a_2,\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots \\ f(3) & = & a_3,\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots \\ \vdots & & \vdots \\ f(n) & = & a_n,\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Δηλ. έχουμε μία ακολουθία

$$\begin{array}{rcl}
f(1) & = & a_1,\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots \\
f(2) & = & a_2,\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots \\
f(3) & = & a_3,\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots \\
\vdots & & \vdots \\
f(n) & = & a_n,\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Θα δείξουμε οτι η συνάρτηση f δεν είναι επί, γράφοντας τη δεκαδική παράσταση ενός αριθμού που είναι διαφορετικός από όλα τα $f(n)$.

Έστω ο αριθμός $\beta = 0, b_1\, b_2\, \dots\, b_n\, \dots$ όπου

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad a_{nn} = 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad a_{nn} \neq 0 \end{cases}$$

Τότε, $\beta \neq f(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι διαφέρει στο n-οστό δεκαδικό ψηφίο, $b_n \neq a_{nn}$.

Αρα, $\beta \notin f(\mathbb{N})$ και συνεπως η f δεν είναι επί

- Αυτό το επιχείρημα ονομάζεται *διαγώνιο επιχείρημα του Cantor* και δείχνει οτι $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Αφού $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, τότε $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ και αφου $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ συμπεραίνουμε οτι $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
- Συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{R}$ με $\mathfrak{c}$, άρα $\aleph_0 < \mathfrak{c}$
- Μία παραλλαγή του διαγωνίου επιχειρήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε οτι για κάθε πληθικό αριθμό μπορούμε να βρούμε έναν μεγαλύτερο.

- Πρόταση: **Για κάθε σύνολο A το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ έχει γνήσια μεγαλύτερο πληθικό αριθμό.**

Δηλαδή, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Αποδ. Η συνάρτηση $g : A \to \mathcal{P}(A)$ με $g(a) = \{a\}$, για καθε $a \in A$, είναι ένα προς ένα. Αρα $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Πρέπει να δείξουμε οτι $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

Θα δείξουμε οτι καμία συνάρτηση $f : A \to \mathcal{P}(A)$ δεν είναι επί.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία $f : A \to \mathcal{P}(A)$ που είναι επί και θα φτάσουμε σε άτοπο

Το $f(a)$ είναι ένα υποσύνολο του A. Άρα για κάθε $a \in A$ μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα:

ανήκει το a στο υποσύνολο $f(a)$;

Επιλέγουμε τα στοιχεία A για τα οποία η απάντηση είναι όχι, και ορίζουμε το σύνολο

$$B = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\}.$$

Θα δειξουμε ότι το $B \subseteq A$ δεν ανήκει στην εικόνα της f.

Πράγματι, αν $B \in f(A)$ δηλαδή αν υπαρχει $b \in A$ με $B = f(b)$, τότε:

αν $b \in B$ τότε, από τον ορισμό του B, $b \notin B$

αν $b \notin B$ τότε, από τον ορισμό του B, $b \in B$

Συμπεραίνουμε οτι το $B \in \mathcal{P}(A)$ δεν ανήκει στην εικόνα της f, και άρα η $f : A \to \mathcal{P}(A)$ δεν είναι επί.

- Η πρόταση που αποδείξαμε δείχνει οτι υπάρχει μία ιεραρχία από άπειρα!
- Ξεκινάμε με το $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ και έχουμε... $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots$