ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2019-20
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. α) Δείξτε ότι τό $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο αν και μόνον αν τό $f(x+a)$, $a \in \mathbb{Q}$, είναι ανάγωγο πολυώνυμο.
β) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $x^{p-1} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, όπου $p =$πρώτος, είναι ανάγωγο και βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})/\mathbb{Q}$.
γ) Για $p =$περιττό πρώτο, θέτουμε $a = \mathrm{Re}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: $\mathbb{Q}(a) \leq \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ και, επίσης, ότι $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}(a)] = 2$ και $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = \frac{p-1}{2}$.

Πρόβλημα 2. **α)** Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$ βαθμού n. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = m$. Αν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι το $f(x)$ παραμένει ανάγωγο και ως πολυώνυμο τού $F[x]$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.

Πρόβλημα 3. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε ως $2^{1/n}$ την μοναδική πραγματική θετική ρίζα τής εξίσωσης $x^n - 2 = 0$ και έστω $A_n = \mathbb{Q}(2^{1/n})$.
α) Υπολογίστε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq A_n$.
β) Αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \mid n$ δείξτε ότι $A_m \leq A_n$ και υπολογίστε τον βαθμό $[A_n : A_m]$.
γ) Αν $(m, n) = 1$ δείξτε ότι $A_{mn} = \mathbb{Q}(2^{1/m}, 2^{1/n})$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι η γωνία των 30^0 (και επομένως και το κανονικό 12-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι το κανονικό 9-γωνο δεν είναι κατασκευάσιμο.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι αν E, L επεκτάσεις τού $\mathbb{Q}$ τότε κάθε ομομορφισμός σωμάτων $\phi : E \to L$ είναι $\mathbb{Q}$-ομομορφισμός. Δείξτε τό ίδιο αν στη θέση τού $\mathbb{Q}$ έχουμε τό σώμα $\mathbb{Z}_p$, $p =$πρώτος.

Πρόβλημα 7. α) Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο που έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2.
β) Δείξτε ότι τό $f(x)$ ως πολυώνυμο τού $\mathbb{R}[x]$ αναλύεται ως $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ όπου το πρώτο πολυώνυμο δεν είναι ανάγωγο και τό δεύτερο είναι.
γ) Έστω $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Δείξτε ότι $\rho^2 = a^2 = b + d$. Δείξτε ότι τό ρ^2 είναι ρίζα τού πολυωνύμου $g(x) = x^3 - 8x - 16$, τό οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$. (Υπόδειξη: $a^2[(b+d)^2 - 4bd] = 16$).
δ) Δείξτε ότι δεν μπορεί και οι δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 να είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί. Άρα βρήκαμε $a \in \mathbb{R}$ με $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2^2$, αλλά a όχι κατασκευάσιμος αριθμός.