Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών είναι μοναδικό.

Ας υποθέσουμε ότι $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ είναι ελάχιστα κοινά πολλαπλάσια των $a, b \in \mathbb{N}$.
Θα δείξουμε ότι $m_1 = m_2$.

- Το m_1 είναι κοινό πολ/σιο διαιρείται από κάθε εκπ, άρα $m_2 \mid m_1$.
- Το m_2 είναι κοινό πολ/σιο διαιρείται από κάθε εκπ, άρα $m_1 \mid m_2$.
- $m_1 \mid m_2$, $m_2 \mid m_1$ και $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, οπότε $m_1 = m_2$.

Άσκηση 2

Σε αυτή την άσκηση θα δούμε μία διαφορετική απόδειξη της σχέσης εκπ$(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

1. Δείξτε ότι ο $d = ab/(a, b)$ είναι φυσικός αριθμός.
2. Δείξτε ότι εκπ$(a, b) \mid d$. Υπόδειξη: το d είναι κοινό πολλαπλάσιο των a, b.
3. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι $ab = \lambda \cdot$ εκπ$(a, b) \cdot (a, b)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το $\lambda \cdot (a, b)$ είναι κοινός διαιρέτης των a, b. Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $\lambda \cdot (a, b) \mid (a, b)$.
4. Δείξτε ότι εκπ$(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

- Ο (a, b) είναι κοινός διαιρέτης των a, b, άρα $(a, b) \mid a$, άρα $a/(a, b) \in \mathbb{N}$. Οπότε $ab/(a, b) \in \mathbb{N}$.
- Παρατηρούμε ότι ο φυσικός αριθμός $d = ab/(a, b)$ είναι κοινό πολ/σιο των a, b:

$$\frac{ab}{(a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \cdot b = a \cdot \frac{b}{(a, b)}.$$

  Το εκπ(a, b) διαιρεί κάθε κοινό πολ/σιο, άρα εκπ$(a, b) \mid d$.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Σε αυτή την άσκηση θα δούμε μία διαφορετική απόδειξη της σχέσης $\text{εκπ}(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

1. Δείξτε ότι ο $d = ab/(a, b)$ είναι φυσικός αριθμός.
2. Δείξτε ότι $\text{εκπ}(a, b) \mid d$. Υπόδειξη: το d είναι κοινό πολλαπλάσιο των a, b.
3. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι $ab = \lambda \cdot \text{εκπ}(a, b) \cdot (a, b)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το $\lambda \cdot (a, b)$ είναι κοινός διαιρέτης των a, b. Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $\lambda \cdot (a, b) \mid (a, b)$.
4. Δείξτε ότι $\text{εκπ}(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

- Έχουμε $ab/(a, b) = \lambda \cdot \text{εκπ}(a, b) \implies ab = \lambda \cdot \text{εκπ}(a, b) \cdot (a, b)$, με $\lambda \in \mathbb{N}$.
- Όποτε
$$\begin{aligned} a &= \frac{\text{εκπ}(a, b)}{b} \cdot \lambda \cdot (a, b) \quad \text{και} \quad \frac{\text{εκπ}(a, b)}{b} \in \mathbb{N} \\ b &= \frac{\text{εκπ}(a, b)}{a} \cdot \lambda \cdot (a, b) \quad \text{και} \quad \frac{\text{εκπ}(a, b)}{a} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$
Άρα το $\lambda \cdot (a, b)$ είναι κοινός διαιρέτης των a και b. Οπότε $\lambda \cdot (a, b) \mid (a, b)$.
- Άρα $\mu \cdot \lambda \cdot (a, b) = (a, b) \implies \mu\lambda = 1 \implies \lambda = \mu = 1$.
- Οπότε $ab = \text{εκπ}(a, b)(a, b)$.

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα παρακάτω ελάχιστα κοινά πολλαπλάσια:

1. εκπ$(2^3 \cdot 5 \cdot 11^2, 2 \cdot 3^7 \cdot 17^3)$,
2. εκπ$(1587, 437)$,
3. εκπ$(n^6 - 1, n^4 - 1)$, με $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

1. εκπ$(2^3 \cdot 5 \cdot 11^2, 2 \cdot 3^7 \cdot 17^3) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 17^3$.
2. Υπολογίζουμε το $(1587, 437)$ με τον Ευκλείδιο αλγόριθμο:
$$\begin{aligned} 1587 &= 3 \cdot 437 + 276 \\ 437 &= 276 + 161 \\ 276 &= 161 + 115 \\ 161 &= 115 + 46 \\ 115 &= 2 \cdot 46 + 23 \\ 46 &= 2 \cdot 23 \end{aligned}$$
$(1587, 437) = 23$, άρα εκπ$(1587, 437) = 1587 \cdot 437/23 = 30153$.
3. Έχουμε δει σε προηγούμενη άσκηση ότι $(n^6 - 1, n^4 - 1) = n^2 - 1$, για κάθε φυσικό $n > 1$.
Άρα εκπ$(n^6 - 1, n^4 - 1) = (n^6 - 1)(n^4 - 1)/(n^2 - 1) = (n^6 - 1)(n^2 + 1)$.