Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

(i) **Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 5.**

$1234 = 246 \cdot 5 + 4$ και $4321 = 864 \cdot 5 + 1$

Αρα $|\Delta_5| = 864 - 247 + 1$

(ii) **Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με$1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4.**

$1234 = 308 \cdot 4 + 2$ και $4321 = 1080 \cdot 4 + 1$

Αρα $|\Delta_4| = 1080 - 309 + 1$

(iii) **Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4 και με το 5.**

Υπολογίσουμε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το εκπ(5,4)=20

$1234 = 61 \cdot 20 + 14$ και $4321 = 216 \cdot 20 + 1$

$|\Delta_4 \cap \Delta_5| = 216 - 62 + 1$

(iv) **Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4 ή με το 5.**

$|\Delta_4 \cup \Delta_5| = |\Delta_4| + |\Delta_5| - |\Delta_4 \cap \Delta_5|$

(i) **Πόσα υποσύνολα του συνόλου [10] περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό;**

A=υποσύνολα του [10] που περιεχουν τουλάχιστον έναν άρτιο,

B=υποσύνολα του [10] που δεν περιεχουν κανέναν άρτιο.

Εχουμε την ξένη ένωση: $\mathcal{P}([10]) = A \cup B$ αρα $|A| = 2^{10} - 2^5$

(ii) **Πόσα υποσύνολα του συνόλου [10] περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο και τουλαχιστον εναν περιττό αριθμό;**

A=(μή κενά) υποσύνολα του [10] που περιεχουν μονο άρτιους

Π=(μή κενά) υποσύνολα του [10] που περιεχουν μονο περιττούς

B=(μή κενά) υποσύνολα του [10] που περιεχουν τουλάχιστον έναν άρτιο και τουλάχιστον έναν περιττό

$\mathcal{P}([10]) \setminus \{\emptyset\} = A \cup \Pi \cup B$ και A, Π, B ανα δύο ξένα μεταξύ τους

$2^{10} - 1 = (2^5 - 1) + (2^5 - 1) + |B|$

$|B| = 2^{10} - 1 - (2^5 - 1) - (2^5 - 1) = 2^{10} - 2 \cdot 2^5 + 1$

(iii) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του [10] τέτοιο ώστε $2 \in A$;**

$\{2\} \cup B \quad \text{με} \quad B \subseteq \{1, 3, 4, \ldots, 10\}$

Έχουμε 2^9 επιλογές

(iv) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του [10] τέτοιο ώστε $2 \in A$ και $4 \in A$;**

$A = \{2, 4\} \cup B \quad \text{με} \quad B \subseteq \{1, 3, 5, 6, \ldots, 10\}$

Εχουμε 2^8 επιλογές

(v) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του [10] τέτοιο ώστε $2 \in A$ ή $4 \in A$;**

Συμβολισμός A_i σύνολο υποσυνόλων του [10] που περιέχουν το i

$|A_2 \cup A_4| = |A_2| + |A_4| - |A_2 \cap A_4| = 2^9 + 2^9 - 2^8$

(vi) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του [10] τέτοιο ώστε $2 \in A$ ή $4 \in A$ ή $6 \in A$;**

$|A_2 \cup A_4 \cup A_6| = |A_2| + |A_4| + |A_6| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_6| - |A_4 \cap A_6 + |A_2 \cap A_4 \cap A_6|$

$|A_2 \cup A_4 \cup A_6| = 2^9 + 2^9 + 2^9 - 2^8 - 2^8 - 2^8 + 2^7$

(i) **Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν κάποιο 2 στο ανάπτυγμά τους;**

$S = \{k : 0 \leq k < 10^6\}$

$A = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 2 στο ανάπτυγμά του}\}$

$B = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ δεν εχει 2 στο ανάπτυγμά του}\}$

$S = A \cup B$, ξένη ενωση $\quad \Rightarrow \quad |A| = 10^6 - 9^6$

(ii) **Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ δεν έχουν ούτε 2 ούτε 3 στο ανάπτυγμά τους;**

εχουμε 6 ψηφία

κάθε ψηφίο εχει τις επιλογές $0, 4, 5, \ldots, 9$

Αρα έχουμε 8^6 τετοιους αριθμούς

(iii) **Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν κάποιο 2 ή 3 στο ανάπτυγμά τους;**

$S = \{k : 0 \leq k < 10^6\}$

$A = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 2 ή 3 στο ανάπτυγμά του}\}$

$B = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ δεν εχει ούτε 2 ούτε 3 στο ανάπτυγμά του}\}$

$S = A \cup B$, ξένη ενωση $\quad \Rightarrow \quad |A| = 10^6 - 8^6$

(iv) **Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν και 2 και 3 στο ανάπτυγμά τους;**

$A = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 2 ή 3 στο ανάπτυγμά του}\}$

$B = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 2 στο ανάπτυγμά του}\}$

$C = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 3 στο ανάπτυγμά του}\}$

$B \cap C = \{k : 0 \leq k < 10^6,\ k \text{ εχει 2 και 3 στο ανάπτυγμά του}\}$

$A = B \cup C$

$|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$

$10^6 - 8^6 = 2(10^6 - 9^6) - |B \cap C| \ \Rightarrow\ |B \cap C| = 10^6 - 2 \cdot 9^6 + 8^6$

Ασκηση 7: Μία δυαδική συμβολοσειρά μήκους n είναι μία ακολουθία $(a_1, \ldots, a_n)$ τέτοια ώστε $a_i = 0$ ή 1.

(i) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 υπάρχουν; 2^{10}

(ii) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 0, 0, 0; 2^7

(iii) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 0, 0, 0 ή τελειώνουν με 1, 1; $2^7 + 2^8 - 2^5$

Ασκ.8 Πόσους διαιρέτες έχει ο φυσικός αριθμός $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, όπου $p_1, \ldots, p_k$ πρώτοι αριθμοί και $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$;

Ολοι οι διαιρέτες του n είναι της μορφής $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ με $0 \leq a_i \leq n_i$

Αρα αρκεί να μετρήσουμε όλες τις επιλογές $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ με $0 \leq a_i \leq n_i$

οι οποίες είναι $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$

Ασκ.9

(i) **Αν p, q πρώτοι και $n = pq$, να βρείτε το πλήθος των ακεραίων $0 < k \leq n$ οι οποίοι είναι πρώτοι προς το n.**

Εχουμε $\{1, \dots, n\} = \underbrace{\{k : 1 \leq k \leq n \text{ με } (k, n) = 1\}}_{A} \cup \underbrace{\{k : 1 \leq k \leq n \text{ με } (k, n) \neq 1\}}_{B}$, A, B ξένα μεταξύ τους

Εφόσον $n = pq$, οι αριθμοι k οι οποίοι δεν είναι πρώτοι προς το n είναι όσοι είναι πολλαπλάσια του p ή πολλαπλάσια του q

Δηλ, αν $M_p = \{k : 0 < k \leq pq,\ k \text{ πολ/σιο του } p\}$, $M_q = \{k : 0 < k \leq pq,\ k \text{ πολ/σιο του } q\}$ τότε $B = M_p \cup M_q$

$$1, 2, \dots, p, \dots, 2p, \dots, 3p, \dots\dots, qp \qquad \Rightarrow \qquad |M_p| = q$$

$$1, 2, \dots, q, \dots, 2q, \dots, 3q, \dots\dots, pq \qquad \Rightarrow \qquad |M_q| = p$$

$|B| = |M_p \cup M_q| = |M_p| + |M_q| - |M_p \cap M_q| = q + p - 1$

Αρα, $|A| = n - |B| = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1)$

(ii) Αν p, q, r πρώτοι και $n = pqr$, να βρείτε το πλήθος των ακεραίων $0 < k \leq n$ οι οποίοι είναι πρώτοι προς το n.

Εχουμε $\{1, \dots, n\} = \underbrace{\{k : 1 \leq k \leq n \text{ με } (k, n) = 1\}}_{A} \cup \underbrace{\{k : 1 \leq k \leq n \text{ με } (k, n) \neq 1\}}_{B}$, A, B ξένα μεταξύ τους

Εφόσον $n = pqr$, οι αριθμοι k οι οποίοι δεν είναι πρώτοι προς το n είναι όλοι όσοι είναι πολλαπλάσια του p ή πολλαπλάσια του q ή πολλαπλάσια του r

Δηλαδη $|B| = |M_p \cup M_q \cup M_r|$

$$|B| = |M_p \cup M_q \cup M_r| = |M_p| + |M_q| + |M_r| - |M_p \cap M_q| - |M_p \cap M_r| - |M_q \cap M_r| + |M_p \cap M_q \cap M_r|$$

$$= |M_p| + |M_q| + |M_r| - |M_{pq}| - |M_{pr}| - |M_{qr}| + |M_{pqr}|$$

$1, 2, \dots, p, \dots, 2p, \dots, 3p, \dots\dots, qrp \quad \Rightarrow \quad |M_p| = qr$

$1, 2, \dots, q, \dots, 2q, \dots, 3q, \dots\dots, prq \quad \Rightarrow \quad |M_q| = pr$

$1, 2, \dots, r, \dots, 2r, \dots, 3r, \dots\dots, pqr \quad \Rightarrow \quad |M_r| = pq$

$1, 2, \dots, pq, \dots, 2pq, \dots, 3pq, \dots\dots, rpq \quad \Rightarrow \quad |M_{pq}| = r$

$1, 2, \dots, pr, \dots, 2pr, \dots, 3pr, \dots\dots, qpr \quad \Rightarrow \quad |M_{pr}| = q$

$1, 2, \dots, qr, \dots, 2qr, \dots, 3qr, \dots\dots, pqr \quad \Rightarrow \quad |M_{pq}| = p$

Άρα
$$\begin{aligned} |A| &= n - |B| \\ &= pqr - qr - pr - pq + p + q + r - 1 \\ &= (p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

Ενας άνθρωπος έχει 10 φίλους. Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο με τουλάχιστον δύο από αυτούς;

Υπόδειξη: Σκεφτείτε το πρόβλημα με σύνολα και υποσύνολα.

Αρκεί να μετρήσουμε όλα τα υποσύνολα των 10 φίλων του, εξαιρώντας τα μονοσύνολα και το κενό σύνολο

Αρα, $2^{10} - 10 - 1$

(i) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$.**

Υπόδειξη: Κάνετε κάτι ανάλογο όπως την συνάρτηση f της διαφάνειας σελ. 11.
Π.χ. για το (i) οριστε μία συνάρτηση $f : \{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\} \longrightarrow \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2\}$

με

$$f(A, B) = (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{όπου} \quad a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad ?? \\ 1 & \text{αν} \quad ?? \\ 2 & \text{αν} \quad ?? \end{cases}$$

Ποιές θα είναι οι τρείς περιπτώσεις·

Πρόταση: **Εάν A είναι πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεια, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του είναι 2^n.**

Δηλαδή $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

2η απόδειξη: Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f : \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{1-1}} \Gamma = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ φορες}}$

Από τον κανόνα γινομένου $|\Gamma| = 2^n$, αρα και $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Παρατηρούμε ότι $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 0 \text{ ή } 1\}$

Ορίζουμε $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \Gamma$ ως εξης: αν $X \subseteq A$ τότε $f(X) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_i \in X \\ 0 & \text{αν } a_i \notin X \end{cases}$

- η f είναι καλά ορισμένη ✔
- η f είναι 1-1: αν $f(X) = f(X') = (x_1, \dots, x_n)$ τότε $X = Y = \{a_i \in A : x_i = 1\}$
- η f είναι επί: εστω $(x_1, \dots, x_n)$ ακολουθία με $x_i = 0$ ή 1. Τοτε, αν $X = \{a_i \in A : x_i = 1\}$ τότε $f(X) = (x_1, \dots, x_n)$

(i) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$.**

Ορίζουμε $f : \{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\} \longrightarrow \Gamma = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2\}$ ως εξης:

$$f(A, B) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{όπου} \quad a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \in A \\ 1 & \text{αν } i \in B \\ 2 & \text{αν } i \notin A \cup B \end{cases}$$

- η f είναι καλά ορισμένη
- η f είναι 1-1
- η f είναι επί

Παρατηρουμε ότι $|\Gamma| = 3^n$

Επομένως, $|\{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\}| = 3^n$

(ii) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \neq \emptyset$.**

Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset\}$

Εχουμε

$$\begin{aligned}\{(A,B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\} =& \{(A,B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset\} \\ & \bigcup \{(A,B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A = \emptyset\}\end{aligned}$$

Από τα ζεύγη συνόλων που μετρήσαμε πριν, πρέπει να αφαιρεσουμε αυτά για τα οποία $A = \emptyset$

Δηλαδή, θέλουμε να αφαιρέσουμε τα ζεύγη $(\emptyset, B)$ με $\emptyset \cap B = \emptyset$ και $B \subseteq [n]$

Το πλήθος αυτών των ζευγών είναι τόσο όσα και τα υποσυνολα $B \subseteq [n]$

Αρα, τελικά το ζητούμενο είναι $3^n - 2^n$

(iii) **Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$ και $A, B \neq \emptyset$.**

Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset\}$

Εχουμε

$$\begin{aligned}\{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\} = & \{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset\} \\ & \bigcup \{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A = \emptyset\} \\ & \bigcup \{(A, B) : A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, B = \emptyset\}\end{aligned}$$

Από τα ζεύγη συνόλων που μετρήσαμε πριν, πρέπει να αφαιρεσουμε αυτά για τα οποία $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$

Τα δύο τελευταια σύνολα έχουν κοινό στοιχείο το $(\emptyset, \emptyset)$

Αρα, τελικά το ζητούμενο είναι $3^n - 2^n - 2^n + 1$