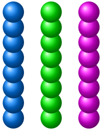
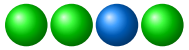
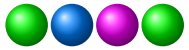
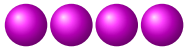
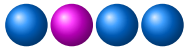
Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

π.χ. Έχουμε απειρες μπλέ, πράσινες και ρόζ μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 και να τις βάλω στη σειρά;



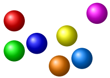
 ή  ή  ή  ή....

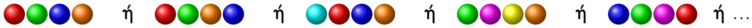
- Διατάξεις με επανάληψη $\boxed{n^k}$
  - ➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, φτιάχνω μία σειρά με k απο αυτά
  - ➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, μοιράζω από ένα σε k άτομα

π.χ. Πόσες λέξεις με 6 γράμματα μπορώ να γράψω με τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου; 24^6

π.χ. Πόσες συναρτήσεις $f : [n] \longrightarrow [m]$ υπάρχουν; m^n

π.χ. Έχουμε 7 διαφορετικές μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από αυτές και να τις βάλουμε στη σειρά;





- διατάξεις k αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα:

$$\boxed{P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\text{διότι} \quad \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 1ο}}}{n} \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 2ο}}}{(n-1)} \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 3ο}}}{(n-2)} \times \cdots\cdots \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το } k\text{-οστό}}}{(n-k+1)}$$

☞ Δεν είναι κανόνας γινομένου, διότι η πρώτη επιλογή επηρεάζει τις δυνατότητες μας για τη δευτερη κ.ο.κ.

☞ Όμως, το πλήθος των δυνατοτήτων της κάθε επιμέρους επιλογής παραμενει το ίδιο π.χ. Τρόποι πλήρωσης 4 (διαφορετικών) θέσεων εργασίας, αν έχουμε 30 υποψήφιους:

$P(30,4) = \frac{30!}{(30-4)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$

π.χ. Τρόποι ανάθεσης 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές:

$P(10,10) = 10!$

π.χ. Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας ελληνικούς χαρακτήρες:

$P(24,10) = \frac{24!}{(24-10)!}$

π.χ. Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας ελληνικούς χαρακτήρες:

$P(24,24) = 24!$

π.χ. Το προηγούμενο ερώτημα με την επιπλέον απαίτηση τα A,B να εμφανίζονται συνεχόμενα

$P(23,23) = 23!$

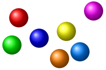
π.χ. Το προηγούμενο ερώτημα με την επιπλέον απαίτηση τα A,B εμφανίζονται σε διπλανές θέσεις:

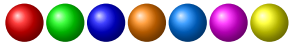
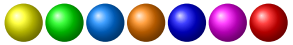
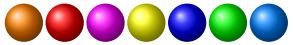
$2 \cdot 23!$

π.χ. Μία αίθουσα κινηματογράφου έχει 50 αριθμημένες θέσεις. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 30 άτομα;

$P(50,30)$

π.χ. Έχουμε 7 διαφορετικές μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε στη σειρα;



 ή  ή  ή ...

- μεταθέσεις n διακεκριμένων αντικειμένων: $\boxed{n!}$

- Οι μεταθεσεις ειναι διατάξεις (χωρίς επανάληψη) με $k = n$

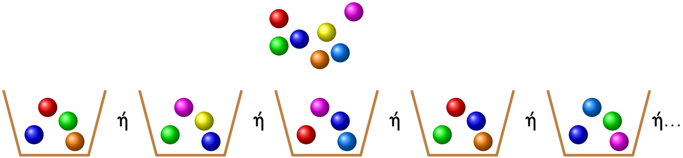
π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου; $24!$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, ώστε το Α να βρίσκεται στη 10η θέση; $23!$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, ώστε το Α να **μην** βρίσκεται στην 1η θέση; $24! - 23!$

π.χ. Έχουμε 7 διακεκριμένες μπάλες. Θελουμε να επιλέξουμε 4 και να τις βάλουμε σε ένα κουτί.

Μέσα στο κουτί, δεν έχει σημασία με ποιά σειρά θα ρίξουμε τις μπάλες!



- συνδυασμοί "k από n" ή "n ανά k": τρόποι να επιλέξω k από n διακεκριμένα αντικείμενα.

  Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία επιλέγω τα k αντικείμενα

$$\boxed{C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Απόδειξη:

Παίρνω k απο τα n και τα βάζω στη σειρά: αυτό γίνεται με $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους

Εφοσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη, η επιλογή μιας συγκεκριμένης k-άδας έχει μετρηθεί $k!$ φορές

Αρα πρέπει να διαιρέσουμε με $k!$. Δηλαδή $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή από σύνολο 20 φοιτητών; $\binom{20}{5}$

π.χ. Πόσα υποσύνολα με k στοιχεία περιέχει ένα σύνολο με n διακεκριμένα στοιχεία; $\binom{n}{k}$

- Οι παρακάτω ιδιότητες προκύπτουν με πράξεις, αλλά εχουν και συνδυαστική εξήγηση
  - $\binom{n}{0} = 1$ διαλέγω τίποτα από n
  - $\binom{n}{1} = n$ διαλέγω ενα από n
  - $\binom{n}{n} = 1$ διαλέγω ολα τα στοιχεια
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ διαλέγω k από n $\Leftrightarrow$ δεν διαλέγω $n-k$ από n
  - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

  Εχουμε ένα σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

  $\binom{n}{k}$ = τρόποι να φτιάξω μία k-αδα απο τα στοιχεία του $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

  ➤ Επιλέγουμε k στοιχεία από το $A \setminus \{a_n\} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ ή

  ➤ Επιλέγουμε $k-1$ στοιχεία από το $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ και συμπληρώνουμε την k-άδα με το στοιχείο a_n

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή με πρόεδρο και 4 μέλη, από σύνολο 20 φοιτητών;

<u>1ος τρόπος</u>: $20 \cdot \binom{19}{4} = 20 \cdot \frac{19!}{4!15!} = \frac{20 \cdot 19!}{4!15!} = 5 \cdot \frac{20!}{5!15!}$

<u>2ος τρόπος</u>: $\binom{20}{5} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{20!}{5!15!}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή με πρόεδρο, αντιπρόεδρο και 3 μέλη, από σύνολο 20 φοιτητών;

<u>1ος τρόπος</u>: $20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{3} = 20 \cdot 19 \frac{18!}{3!15!} = 5 \cdot 4 \frac{20!}{5!15!}$

<u>2ος τρόπος</u>: $\binom{20}{5} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{20!}{5!15!} 5 \cdot 4$

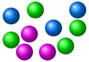
π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω σε μια σειρά 13 μηδενικά και 7 άσσους;

$$\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{11}{\_}\ \underset{12}{\_}\ \underset{13}{\_}\ \underset{14}{\_}\ \underset{15}{\_}\ \underset{16}{\_}\ \underset{17}{\_}\ \underset{18}{\_}\ \underset{19}{\_}\ \underset{20}{\_}$$

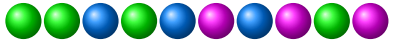
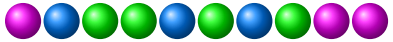
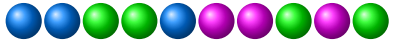
αρκεί να μετρήσω όλες τις επιλογές τοποθέτησης των 1 ➠ $\binom{20}{7}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω σε μία σειρά 13 κορίτσια και 7 αγόρια;

π.χ. Εχουμε 10 μπάλες: 3 ρόζ, 3 μπλέ και 4 πράσινες.



Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε σε μία σειρά;

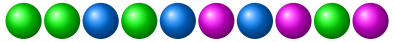
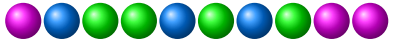
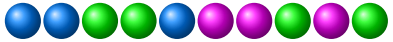
 ή  ή  ή....

- Μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων: $\boxed{\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$ όπου $n_1 + \cdots + n_k = n$

  ➠ έχω n_i μπάλες χρώματος χ_i και τις βάζω στη σειρά

π.χ. Πόσους ακεραιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5$; $\frac{12!}{3!5!2!}$

π.χ. Εχουμε 10 μπάλες: 3 ρόζ, 3 μπλέ και 4 πράσινες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε σε μία σειρά;

 ή  ή  ή....

1η αποδειξη: εχουμε n_i μπαλες χρωματος i. Το συνολικό πλήθος των μπαλων είναι n, δηλ. $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ και θέλουμε να τις τοποθετήσουμε στη σειρα

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \cdot \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

διαλέγω n_1 θεσεις για τις μπαλες χρωματος 1

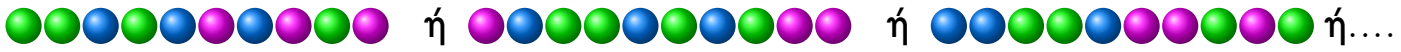
από τις $n-n_1$ θέσεις που έμειναν διαλέγω n_2 για τις μπαλες χρωματος 2

κ.τ.λ.

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots n_{k-2})!}{n_{k-1}!\underbrace{(n-n_1-n_2-\cdots n_{k-2}-n_{k-1})!}_{n_k!}}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_{k-1}!n_k!}$$

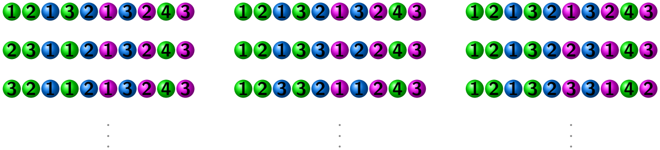
π.χ. Εχουμε 10 μπάλες: 3 ρόζ, 3 μπλέ και 4 πράσινες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε σε μία σειρά;



- Μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων: $\boxed{\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$ όπου $n_1 + \cdots + n_k = n$

2η αποδειξη: εχουμε n_i μπαλες χρωματος i. Το συνολικό πλήθος των μπαλων είναι n, δηλ. $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ και θέλουμε να τις τοποθετήσουμε στη σειρα

Αν αριθμήσουμε τις μπάλες, έχουμε $n!$ τρόπους να τις βάλουμε στη σειρα



Μία διάταξη μή αριθμημένων μπαλών την επαναλαμβάνουμε $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!$ φορές όταν οι μπάλες έχουν αρίθμηση π.χ. Πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ;

Σ Υ Ν Δ Υ Α Σ Τ Ι Κ Η $\frac{11!}{2!2!}$

π.χ. Πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ οι οποίοι περιέχουν ΥΥ στη σειρα;

Σ Ν Δ Α Σ Τ Ι Κ Η $\boxed{\text{ΥΥ}}$ $\frac{10!}{2!}$

π.χ. Πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ στους οποίους τα Α,Ι είναι σε διπλανές θέσεις;

Σ Υ Ν Δ Υ Σ Τ Κ Η $\boxed{\text{ΑΙ}}$ ή Σ Υ Ν Δ Υ Σ Τ Κ Η $\boxed{\text{ΙΑ}}$ $2 \cdot \frac{10!}{2!2!}$

π.χ. Πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ οι οποίοι αρχίζουν με Α ή τελειώνουν με Σ;

- Α __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ $\frac{10!}{2!2!}$
- __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ Σ $\frac{10!}{2!}$
- Α __ __ __ __ __ __ __ __ __ Σ $\frac{9!}{2!}$
- Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: $\frac{10!}{2!2!} + \frac{10!}{2!} - \frac{9!}{2!}$

π.χ. Σε μία κλήρωση οι λαχνοί αποτελούνται από όλους τους αναγραμματισμούς των γραμμάτων Π Ο Λ Λ Α Δ Ω Ρ Α. Οι τυχεροί λαχνοί είναι αυτοί που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ ή τη λέξη ΔΩΡΑ ή και τις δύο.

(i) Πόσοι είναι όλοι οι λαχνοί; $\frac{9!}{2!2!}$

(ii) Πόσοι είναι οι τυχεροί λαχνοί;

Πρέπει να μετρήσουμε όλους τους αναγραμματισμούς των γραμμάτων ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ οι οποίοι περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ ή τη λέξη ΔΩΡΑ;

$\boxed{\text{ΠΟΛΛΑ}}$,Δ,Ω,Ρ,Α $5!$

$\boxed{\text{ΔΩΡΑ}}$,Π,Ο,Λ,Λ,Α $\frac{6!}{2!}$

$\boxed{\text{ΠΟΛΛΑ}}$ $\boxed{\text{ΔΩΡΑ}}$ ή $\boxed{\text{ΔΩΡΑ}}$ $\boxed{\text{ΠΟΛΛΑ}}$ 2

Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού: $5! + \frac{6!}{2!} - 2$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τακτοποιήσουμε 10 διακεκριμένα άτομα σε 4 καμπίνες: μία 4-κλινη, μία 3-κλινη, μία 2-κλινη και μία μονόκλινη;

<u>1ος τρόπος:</u> $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{10!}{4!6!}\,\frac{6!}{3!3!}\,\frac{3!}{2!1!}\,\frac{1!}{1!0!} = \frac{10!}{4!3!2!1!}$

<u>2ος τρόπος:</u>

κλειδιά τετράκλινης: 🔴 🔴 🔴 🔴 κλειδιά τρίκλινης: 🟢 🟢 🟢 κλειδιά δίκλινης: 🟡 🟡 κλειδί μονόκλινης: 🔵

Με πόσους τρόπους μπορώ να μοιράσω τα κλειδια; $\frac{10!}{4!3!2!1!}$

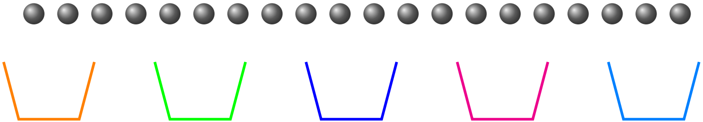
	☺ 1	☺ 2	☺ 3	☺ 4	☺ 5	☺ 6	☺ 7	☺ 8	☺ 9	☺ 10
	🔴	🟡	🟢	🔴	🔵	🟢	🔴	🔴	🟢	🟡
ή										
	🟡	🔴	🟢	🟢	🔴	🔵	🔴	🔴	🟡	🟢
ή										

$\ddots$

➠ το μέτρημα ανάγεται σε μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων

- Μεταθέσεις ομάδων ομοίων αντικειμένων: $\boxed{\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$ όπου $n_1 + \cdots + n_k = n$
  - ➠ έχω n_i μπάλες χρώματος χ_i και τις βάζω στη σειρά
  - ➠ έχω n διακεκριμένα αντικείμενα και θέλω να τα χωρίσω σε k ομάδες, κάθεμία από n_i αντικείμενα

π.χ. Εχουμε 5 διαφορετικά δοχεία με απεριόριστη χωρητικότητα και έχουμε 20 όμοιες μπάλες τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε στα δοχεία, με τυχαίο τρόπο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;



$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν στο 1ο δοχείο βάλουμε } x_1 \text{ μπάλες}\\ \text{Αν στο 2ο δοχείο βάλουμε } x_2 \text{ μπάλες}\\ \text{Αν στο 3ο δοχείο βάλουμε } x_3 \text{ μπάλες}\\ \text{Αν στο 4ο δοχείο βάλουμε } x_4 \text{ μπάλες}\\ \text{Αν στο 5ο δοχείο βάλουμε } x_5 \text{ μπάλες}\end{array}\right\} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

- Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το να βρούμε το πλήθος των μή αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

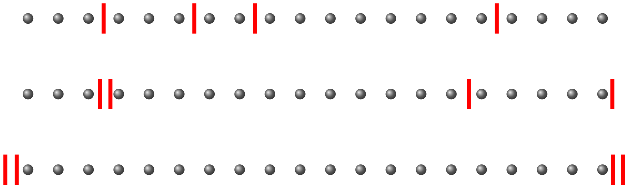
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

- Το πλήθος λύσεων είναι $\binom{20+5-1}{20}$

- Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το να βρούμε το πλήθος των μή αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

- Το πλήθος των μή αρνητικών ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ είναι ισο με το πλήθων των τρόπων να τοποθετήσω 20 μπάλες και 4 διαχωριστικά στη σειρα



$$\longleftrightarrow \quad 3 + 3 + 2 + 8 + 4 = 20$$

$$\longleftrightarrow \quad 3 + 0 + 12 + 5 + 0 = 20$$

$$\longleftrightarrow \quad 0 + 0 + 20 + 0 + 0 = 20$$

- το πλήθων των τρόπων να τοποθετήσω 20 μπάλες και 4 διαχωριστικά στη σειρα είναι $\binom{24}{20}$

  διότι έχω 24 θέσεις στις οποίες πρέπει να τοποθετήσω 20 ομοιες μπάλες και 4 όμοιες γραμμές

  από τις 24 θέσεις διαλέγω τις 20 θέσεις στις οποίες θα τοποθετήσω τις μπάλες (και στις υπολοιπες 4 θέσεις θα τοποθετηθούν αναγκαστικά οι γραμμές)

- **Συνδυασμοί με επανάληψη** $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

  ➠ εχω k όμοιες μπάλες και θέλω να τις τοποθετήσω σε n διακεκριμένα δοχεία άπειρης χωρητικότητας καθένα

  ➠ πλήθος μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

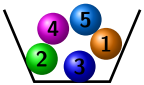
π.χ. Στο ισογειο ενός εξαόροφου κτιρίου μπαίνουν στο ανανσερ 8 άτομα. Το ασανσεερ ανεβαίνει και σταματάει στον 6^o όροφο. Με ποσους τρόπους μπορεί να έχουν εξέλθει τα 8 άτομα;
(οι 8 επιβάτες θεωρούνται πανομοιότυποι μεταξύ τους)

8 όμοιες μπάλες και 6 διαφορετικά δοχεία

Μετράμε το πλήθος των μή αρνητικών ακεραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 8$ ➠ $\binom{8+6-1}{8}$

π.χ. Εχουμε 5 αριθμημένους βόλους σε ένα δοχείο. Κάνουμε 20 φορές την εξής διαδικασία: τραβάμε ένα βόλο, σημειώνουμε ποιό νούμερο βγήκε και επιστρέφουμε τον βόλο στο δοχείο.

Πόσα είναι όλα τα δυνατά αποτελέσματα;



1	2	3	4	5
x	x	x	x	x
x	x	x		x
x	x	x		x
x	x			x
	x			x
	x			
	x			

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν το νούμερο 1 βγήκε } x_1 \text{ φορές}\\ \text{Αν το νούμερο 2 βγήκε } x_2 \text{ φορές}\\ \text{Αν το νούμερο 3 βγήκε } x_3 \text{ φορές}\\ \text{Αν το νούμερο 4 βγήκε } x_4 \text{ φορές}\\ \text{Αν το νούμερο 5 βγήκε } x_5 \text{ φορές}\end{array}\right\} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

- Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το να βρούμε το πλήθος των μή αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

- Το πλήθος λύσεων είναι $\binom{20+5-1}{20}$

- **Συνδυασμοί με επανάληψη** $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$
  - εχω k όμοιες μπάλες και θέλω να τις τοποθετήσω σε n διακεκριμένα δοχεία άπειρης χωρητικότητας καθένα
  - εχω n διαφορετικά αντικείμενα και επιλέγω k από αυτά επιτρέποντας επανάληψη
  - πλήθος μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

π.χ. Στο ισογειο ενός εξαόροφου κτιρίου υπάρχει ένα δοχείο με 6 αριθμημένους βόλους. Στο κτίριο εισέρχονται 8 άτομα και κάνουν την εξής διαδικασία: τραβάνε εναν αριθμημένο βόλο, βλέπουν το νούμερο, επιστρέφουν το βόλο και πηγαίνουν στον όροφο τον οποίο ήταν ο αριθμός του βόλου τράβηξαν. Με ποσους τρόπους μπορεί να έχουν εξέλθει τα 8 άτομα;
(οι 8 επιβάτες θεωρούνται πανομοιότυποι μεταξύ τους)

Εχουμε 6 διαφορετικά αντικείμενα και επιλέγουμε 8 από αυτά επιτρέποντας επανάληψη

Μετράμε το πλήθος των μή αρνητικών ακεραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 8$ ➠ $\binom{8+6-1}{8}$

① **Διατάξεις με επανάληψη** $\boxed{n^k}$

➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, βάζω στη σειρά k από αυτά

➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, μοιράζω από ένα σε k άτομα

② **Διατάξεις** $\boxed{P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

➠ εχω n διαφορετικά αντικείμενα και βάζω k από αυτά στη σειρά

③ **Μεταθέσεις** $\boxed{n!}$

➠ εχω n διαφορετικά αντικείμενα και τα βάζω στη σειρά

④ **Συνδυασμοί** $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

➠ Διαλέγω n από k διαφορετικά αντικείμενα, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά επιλογής

⑤ **Συνδυασμοί με επανάληψη** $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

➠ εχω k όμοιες μπάλες και θέλω να τις τοποθετήσω σε n διακεκριμένα δοχεία άπειρης χωρητικότητας καθένα

➠ εχω n διαφορετικά αντικείμενα και θέλω να επιλέξω k από αυτά επιτρέποντας επανάληψη

➠ πλήθος μή αρνητικών ακέραιων λύσεων της $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

⑥ **Μεταθέσεις σε ομάδες** $\boxed{\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$

όπου $n_1 + \cdots + n_k = n$

➠ έχω n_i μπάλες χρώματος χ_i και τις βάζω στη σειρά

➠ έχω n διακεκριμένα αντικείμενα και θέλω να τα χωρίσω σε k ομάδες, κάθεμία από n_i αντικείμενα