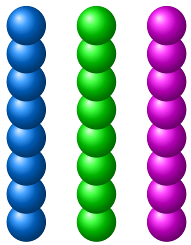
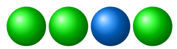
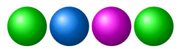
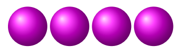
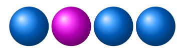
Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

π.χ. Έχουμε απειρες μπλέ, πράσινες και ρόζ μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 4 και να τις βάλω στη σειρά;



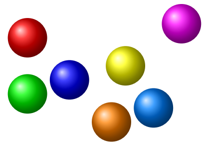
 ή  ή  ή  ή....

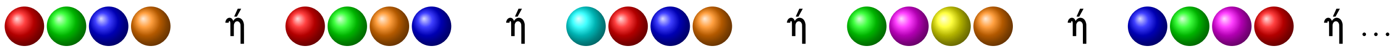
- Διατάξεις με επανάληψη $\boxed{n^k}$
  - ➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, φτιάχνω μία σειρά με k απο αυτά
  - ➠ εχω n αντικείμενα σε άπειρα αντίτυπα, μοιράζω από ένα σε k άτομα

π.χ. Πόσες λέξεις με 6 γράμματα μπορώ να γράψω με τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου; 24^6

π.χ. Πόσες συναρτήσεις $f : [n] \longrightarrow [m]$ υπάρχουν; m^n

π.χ. Έχουμε 7 διαφορετικές μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από αυτές και να τις βάλουμε στη σειρά;





- διατάξεις k αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα:

$$\boxed{P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\text{διότι} \quad \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 1ο}}}{n} \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 2ο}}}{(n-1)} \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το 3ο}}}{(n-2)} \times \cdots\cdots \times \underset{\substack{\text{επιλογές}\\ \text{για το } k\text{-οστό}}}{(n-k+1)}$$

☞ Δεν είναι κανόνας γινομένου, διότι η πρώτη επιλογή επηρεάζει τις δυνατότητες μας για τη δευτερη κ.ο.κ.

☞ Όμως, το πλήθος των δυνατοτήτων της κάθε επιμέρους επιλογής παραμενει το ίδιο π.χ. Τρόποι πλήρωσης 4 (διαφορετικών) θέσεων εργασίας, αν έχουμε 30 υποψήφιους:

$P(30,4) = \frac{30!}{(30-4)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$

π.χ. Τρόποι ανάθεσης 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές:

$P(10,10) = 10!$

π.χ. Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας ελληνικούς χαρακτήρες:

$P(24,10) = \frac{24!}{(24-10)!}$

π.χ. Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας ελληνικούς χαρακτήρες:

$P(24,24) = 24!$

π.χ. Το προηγούμενο ερώτημα με την επιπλέον απαίτηση τα Α,Β να εμφανίζονται συνεχόμενα

$P(23,23) = 23!$

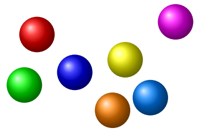
π.χ. Το προηγούμενο ερώτημα με την επιπλέον απαίτηση τα Α,Β εμφανίζονται σε διπλανές θέσεις:

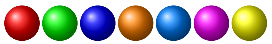
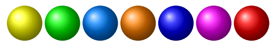
$2 \cdot 23!$

π.χ. Μία αίθουσα κινηματογράφου έχει 50 αριθμημένες θέσεις. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 30 άτομα;

$P(50,30)$

π.χ. Έχουμε 7 διαφορετικές μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις βάλουμε στη σειρα;



 ή  ή  ή ...

- μεταθέσεις n διακεκριμένων αντικειμένων: $\boxed{n!}$

- Οι μεταθεσεις ειναι διατάξεις (χωρίς επανάληψη) με $k = n$

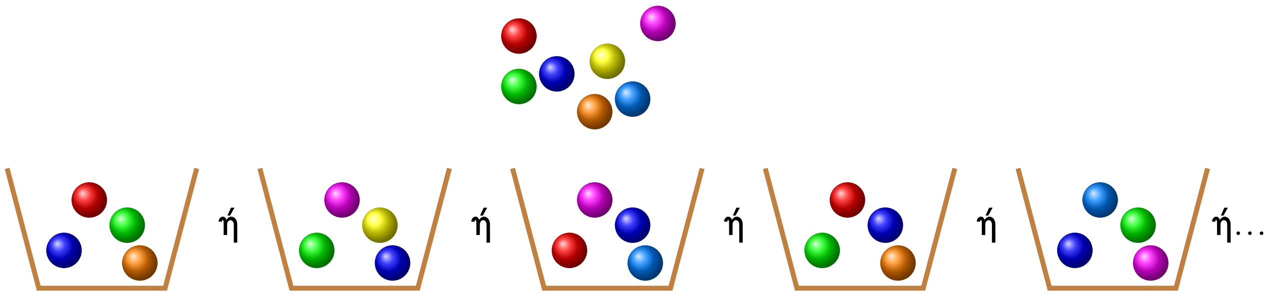
π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου; 24!

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, ώστε το Α να βρίσκεται στη 10η θέση; 23!

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, ώστε το Α να **μην** βρίσκεται στην 1η θέση; $24! - 23!$

π.χ. Έχουμε 7 διακεκριμένες μπάλες. Θελουμε να επιλέξουμε 4 και να τις βάλουμε σε ένα κουτί.

Μέσα στο κουτί, δεν έχει σημασία με ποιά σειρά θα ρίξουμε τις μπάλες!



- συνδυασμοί "k από n" ή "n ανά k": τρόποι να επιλέξω k από n διακεκριμένα αντικείμενα.

  Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία επιλέγω τα k αντικείμενα

$$\boxed{C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Απόδειξη:

Παίρνω k απο τα n και τα βάζω στη σειρά: αυτό γίνεται με $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους

Εφοσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη, η επιλογή μιας συγκεκριμένης k-άδας έχει μετρηθεί $k!$ φορές

Αρα πρέπει να διαιρέσουμε με $k!$. Δηλαδή $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή από σύνολο 20 φοιτητών; $\binom{20}{5}$

π.χ. Πόσα υποσύνολα με k στοιχεία περιέχει ένα σύνολο με n διακεκριμένα στοιχεία; $\binom{n}{k}$

- Οι παρακάτω ιδιότητες προκύπτουν με πράξεις, αλλά εχουν και συνδυαστική εξήγηση
  - $\binom{n}{0} = 1$ διαλέγω τίποτα από n
  - $\binom{n}{1} = n$ διαλέγω ενα από n
  - $\binom{n}{n} = 1$ διαλέγω ολα τα στοιχεια
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ διαλέγω k από n $\Leftrightarrow$ δεν διαλέγω $n-k$ από n
  - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

  Εχουμε ένα σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

  $\binom{n}{k}$ = τρόποι να φτιάξω μία k-αδα απο τα στοιχεία του $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

  - Επιλέγουμε k στοιχεία από το $A \setminus \{a_n\} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ ή
  - Επιλέγουμε $k-1$ στοιχεία από το $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ και συμπληρώνουμε την k-άδα με το στοιχείο a_n

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή με πρόεδρο και 4 μέλη, από σύνολο 20 φοιτητών;

1ος τρόπος: $20 \cdot \binom{19}{4} = 20 \cdot \frac{19!}{4!15!} = \frac{20 \cdot 19!}{4!15!} = 5 \cdot \frac{20!}{5!15!}$

2ος τρόπος: $\binom{20}{5} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{20!}{5!15!}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να φτιάξω μία 5-μελή επιτροπή με πρόεδρο, αντιπρόεδρο και 3 μέλη, από σύνολο 20 φοιτητών;

1ος τρόπος: $20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{3} = 20 \cdot 19 \frac{18!}{3!15!} = 5 \cdot 4 \frac{20!}{5!15!}$

2ος τρόπος: $\binom{20}{5} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{20!}{5!15!} 5 \cdot 4$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω σε μια σειρά 13 μηδενικά και 7 άσσους;

$$\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{11}{\_}\ \underset{12}{\_}\ \underset{13}{\_}\ \underset{14}{\_}\ \underset{15}{\_}\ \underset{16}{\_}\ \underset{17}{\_}\ \underset{18}{\_}\ \underset{19}{\_}\ \underset{20}{\_}$$

αρκεί να μετρήσω όλες τις επιλογές τοποθέτησης των 1 ➠ $\binom{20}{7}$

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω σε μία σειρά 13 κορίτσια και 7 αγόρια;