Θεμέλια

Ελένη Τζανάκη & Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

Εαρινο εξάμηνο 2019-20

Ασκηση 1: Αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $ab = c$ δείξτε ότι $a \leq \sqrt{c}$ ή $b \leq \sqrt{c}$.

Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν a, b, c θετικοί πραγματικοί τ.ω. $ab = c$ και $a > \sqrt{c}$ και $b > \sqrt{c}$

Εφόσον οι ανισότητες είναι θετικές, μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατα μέλη και τότε

παίρνουμε $ab > \sqrt{c}\sqrt{c}$, άτοπο

(ii) Αν mn είναι περιττός ακέραιος τότε και οι δύο m, n είναι περιττοί.

Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν m, n τ.ω. mn περιττος ακέραιος και m όχι περιττός ή n όχι περιττός.

Ισοδ. υποθέτουμε ότι υπάρχουν m, n τ.ω. mn περιττος ακέραιος και m αρτιος ή n αρτιος.

Τότε $mn = m \cdot (2k)$ ή $mn = (2k)n$, δηλαδή mn είναι άρτιος. Ατοπο!

(iii) Το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ρητός και άρρητος με αθροισμα ρητό

Δηλαδή $\rho + \alpha = \rho'$ ή $\alpha = \rho' - \rho$ ή $\alpha = \frac{m'}{n'} + \frac{m}{n} = \frac{m'n+n'm}{n \cdot n'}$

(iv) **Αν $y, x \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $y \leq x$.**

Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση. Τοτε, ($y, x \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$) και $y > x$.

Παίρνουμε $\epsilon = \frac{y-x}{2}$.

Με βάση την υπόθεσή μας θα ισχύει $y \leq x + \frac{y-x}{2}$. Δηλαδή $\frac{y-x}{2} \leq 0 \quad$ ή $\quad y \leq x$. Άτοπο!

(v) **Δεν υπάρχει μέγιστος ακέραιος.**

Εστω ότι υπάρχει μέχιστος ακέραιος M. Τότε $a \leq M$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$

Παίρνουμε $a = 2|M|$ και τότε $2|M| < M$. Άτοπο!

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε τις παρακάτω ισότητες ή ανισότητες:

(ii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

βάση της επαγωγής: $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

(iii) $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$

βάση της επαγωγής: $2 = 2^1 \cdot 1$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$(n+2)\cdots(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2) = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n+1}(2n+1)2(n+1) = 2^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)$$

(iv) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$.

βάση της επαγωγής: για $n = 2$ $\frac{1}{2^2} < 1$ ✔ επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \quad ?????$$

Δείχνουμε την ισχυρότερη ανισότητα: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$.

βάση της επαγωγής: για $n = 2$ $\frac{1}{2^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ ✔ επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{??}{\leq} \frac{3}{4} - \frac{1}{n+1}$$

ισχύει, διότι $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1-n}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1$ ✔

? Γιατί, έχω δείχνουμε κάτι ισχυρότερο, η επαγωγή γίνεται πιο εύκολη;

διότι γίνεται πιο ισχυρό και το επαγωγικό βήμα

(iv) για κάθε $n > 1$ ισχύει $n! < n^n$

βάση της επαγωγής: $2! < 2^2$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$(n+1)! = n!(n+1) < n^n(n+1) < (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$

(v) $\sqrt{n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ για $n \geq 2$. Υπόδειξη: $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$

βάση της επαγωγής: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. ότι $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(vi) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ ρίζες}} = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ Υπόδειξη: $2\cos^2(x) = 1+\cos(2x)$

βάση της επαγωγής: για $n=1$: $\sqrt{2} = 2\cos(\frac{\pi}{4})$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n+1 \text{ ρίζες}} = \sqrt{2+2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})} = \sqrt{2+2\cos(2\frac{\pi}{2^{n+2}})} = \sqrt{4\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε ότι:

(i) $3 \mid (n^3 - 10n + 9)$ για κάθε $n \geq 1$ (Εδώ υπάρχει και άλλη απόδειξη χωρίς επαγωγή, μπορείτε να την δείτε;)

βάση της επαγωγής: $3|(1^3 - 10 + 9)$ δηλ. $3|0$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 10(n+1) + 9 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 10n - 10 + 9 \\ &= \underbrace{n^3 - 10n + 9}_{\text{πολ/σιο του 3}} + \underbrace{3n^2 + 3n - 9}_{\text{πολ/σιο του 3}}\end{aligned}$$

αλλη απόδειξη: $n^3 - 10n + 9 = n^3 - n - 9n + 9 = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\text{πολ/σιο του 3}} - 9n + 9$

(ii) $5|7^n - 2^n$ για κάθε $n \geq 1$.

βάση της επαγωγής: $5|(7-2)$ ✔ επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot 7^n + 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n = 5 \cdot 7^n + 2 \underbrace{(7^n - 2^n)}_{\text{πολ/σιο του 5}}$$

(iii) $7|4^{2n+1}+3^{2n+1}$ για κάθε $n\geq 0$.

βάση της επαγωγής: $7|(4+3)$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$4^{2(n+1)+1}+3^{2(n+1)+1}=4^{2n+3}+3^{2n+3}=4^2\cdot 4^{2n+1}+3^2\cdot 3^{2n+1}=16\cdot 4^{2n+1}+9\cdot 3^{2n+1}=7\cdot 4^{2n+1}+9\underbrace{(4^{2n+1}+3^{2n+1})}_{\text{πολ/σιο του 7}}$$

(iv) $a-b\mid(a^n-b^n)$, όπου a,b είναι ακέραιοι και $n\geq 1$.

βάση της επαγωγής: $a-b|(a-b)$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$a^{n+1}-b^{n+1}\;=\;a\cdot a^n-b\cdot b^n\;=\;(a-b)\cdot a^n+b\cdot a^n-b\cdot b^n\;=\;(a-b)\cdot a^n+b\cdot\underbrace{(a^n-b^n)}_{\text{πολ/σιο του } a-b}$$

(i) Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Δείξτε ότι:

1. ο ορος a_{3n} είναι άρτιος για κάθε $n \geq 1$
2. ο ορος a_{5n} είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \geq 1$

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ εχουμε $a_5 = a_4 + a_3 = a_3 + a_2 + a_2 + a_1 = a_2 + a_1 + 3 = 5$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$
\begin{aligned}
a_{5(n+1)} = a_{5n+5} &= a_{5n+4} + a_{5n+3} \\
&= (a_{5n+3} + a_{5n+2}) + (a_{5n+2} + a_{5n+1}) \\
&= a_{5n+3} + 2a_{5n+2} + a_{5n+1} \\
&= 3a_{5n+2} + 2a_{5n+1} \\
&= 3a_{5n+1} + 3a_{5n} + 2a_{5n+1} = 5a_{5n+1} + 3a_{5n}
\end{aligned}
$$

(ii) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = 1, a_2 = 3$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 3$, δείξτε ότι $a_n < (7/4)^n$.

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ εχουμε $a_1 < \frac{7}{4}$ και για $n = 2$ έχουμε $a_2 < \frac{49}{16}$

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{4} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$$

(iii) **Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 3$, δείξτε ότι $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, όπου $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.**

<u>βάση της επαγωγής</u>: για $n = 2$ εχουμε $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \dfrac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1 = a_2$

<u>επαγωγική υπόθεση</u>: υποθέτω ότι ισχύει για n

<u>επαγωγικό βήμα</u>: δείχνω ότι ισχύει για $n + 1$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha + 1) - \beta^{n-1}(\beta + 1)}{\alpha - \beta} = (*)$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ και $\alpha^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \alpha + 1$

Ομοίως $\beta + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$ και $\beta^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{-2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{-\sqrt{5}+3}{2} = \beta + 1$

Αρα $(*) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

(iv) **Αν μία ακολουθία (a_n) ικανοποιεί την ισότητα $a_{n+1} = 2a_n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε επίσης ικανοποιεί την ισότητα $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.**

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ η ισότητα $a_1 + 1 = 2^{1-1}(a_1 + 1)$ ισχύει

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. υποθέτω ότι ισχύει η ισότητα $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι $a_{n+1} + 1 = 2^n(a_1 + 1)$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2\Big(2^{n-1}(a_1 + 1) - 1\Big) + 1 = 2^n(a_1 + 1) - 2 + 1$$

δηλ. $a_{n+1} + 1 = 2^n(a_1 + 1)$

(v) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως εξής $a_1 = 1$ και $a_n = 2 \cdot a_{[\frac{n}{2}]}$,

δείξτε ότι $a_n \leq n$ για κάθε $n \geq 1$.

<u>βάση της επαγωγής</u>: για $n = 1$ εχουμε $a_1 = 1 \leq 1$ ✔

<u>επαγωγική υπόθεση</u>: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. ότι $a_n \leq n$

<u>επαγωγικό βήμα</u>: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$, δηλ. ότι $a_{n+1} \leq n+1$

<u>αν $n+1$ αρτιος</u>: εστω $n+1 = 2k$. Τότε $a_{n+1} = a_{2k} = 2 \cdot a_k \leq 2 \cdot k = n+1$

<u>αν $n+1$ περιττός</u>: εστω $n+1 = 2k+1$. Τότε $a_{n+1} = a_{2k+1} = 2 \cdot a_k \leq 2 \cdot k \leq 2k+1 = n+1$

Έχουμε (απεριόριστα) νομίσματα αξίας 3 και αξίας 5. Δείξτε με επαγωγή ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιδήποτε ακέραιο ποσό αξίας $n \geq 8$ χρησιμοποιώντας τα παραπάνω νομίσματα.

βάση της επαγωγής: για $n = 8$ έχουμε $8 = 3 + 5$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε $n = a \cdot 3 + b \cdot 5$

επαγωγικό βήμα: θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a', b' \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε $n + 1 = a' \cdot 3 + b' \cdot 5$

Απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $n + 1 = a \cdot 3 + b \cdot 5 + 1$ για κάποια $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

1η περίπτωση: $b = 0$

Τότε $n + 1 = a \cdot 3 + 1$ και εφόσον $n + 1 \geq 8$, θα είναι $a \geq 3$.

Αρα, μπορούμε να γράψουμε $n + 1 = (a - 3) \cdot 3 + 9 + 1 = (a - 3) \cdot 3 + 2 \cdot 5$ ✔

2η περίπτωση: $b \neq 0$

Αρα $b \geq 1$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$n + 1 = a \cdot 3 + (b - 1) \cdot 5 + 5 + 1 = (a + 2) \cdot 3 + (b - 1) \cdot 5$ ✔

Δείξτε ότι οποιοσδήποτε ακέραιος που αποτελείται από 3^n ίδια ψηφία διαιρείται από το 3^n.

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ ✔

Οποιοσδήποτε ακέραιος που αποτελείται από 3 ίδια ψηφία διαιρείται από το 3 (κριτήριο διαιρετότητας του 3 [1])

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: Εστω A ένας ακέραιος που αποτελείται από 3^{n+1} ιδια ψηφία. Δηλ.

$$\begin{aligned}
A &= \underbrace{aaa.aaa.aaa.\cdots.aaa.aaa}_{3^{n+1}\ \text{φορές}\ a} = \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a}.\underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a}.\underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a} \\
&= \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a} + \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a}.\underbrace{000.\cdots.000}_{3^n\ \text{φορες}\ 0} + \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a}.\underbrace{000.\cdots.000}_{3^n\ \text{φορες}\ 0}.\underbrace{000.\cdots.000}_{3^n\ \text{φορες}\ 0} \\
&= \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a} \times (1 + 10^{3^n} + 10^{2\cdot 3^n}) \\
&= \underbrace{aaa.\cdots.aaa}_{3^n\ \text{φορες}\ a} \times (1.000.\cdots.000.001.000.\cdots 000.001) = (3^n \cdot k) \times (3 \cdot \ell)
\end{aligned}$$

[1] Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$$

<u>βάση της επαγωγής:</u> για $n = 1$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^1 \leq \frac{a^1+b^1}{2}$ ✔

<u>επαγωγική υπόθεση:</u> υποθέτουμε ότι ισχύει για n

<u>επαγωγικό βήμα:</u> δείχνουμε ότι ισχύει για $n+1$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} = \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^n+b^n}{2} = \frac{a^{n+1}+a\cdot b^n+b\cdot a^n+b^{n+1}}{4} \overset{?}{\leq} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$$

Δείχνουμε ότι αν $a + b > 0$ τότε ισχύει ότι $a \cdot b^n + b \cdot a^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$ ή ισοδύναμα ότι $(a-b)(b^n - a^n) \leq 0$

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $a < b$

<u>αν $0 < a < b$</u> τότε $a^n < b^n$ και συνεπώς $(a-b)(b^n - a^n) \leq 0$

<u>αν $a < 0 < b$</u> τότε εφόσον $a + b > 0$ θα ειναι $|a| < b$. Τότε $b^n - a^n = \begin{cases} b^n - |a|^n > 0 \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ b^n + |a|^n > 0 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

Για $n \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε αναδρομικά το $n!$ (*n παραγοντικό*) ως $0! = 1$ και $(n+1)! = n!(n+1)$.
Επομένως, πρακτικά, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι το $(n-k)!k!$ διαιρεί το $n!$, για όλα τα k με $0 \leq k \leq n$.

Ισοδύναμα, δείχνουμε ότι $\frac{n!}{(n-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα k με $0 \leq k \leq n$.

<u>βάση της επαγωγής:</u> για $n = 1$

οταν $k = 0$ έχουμε $\frac{1!}{(1-0)!0!} = 1 \in \mathbb{N}$ ✔ οταν $k = 1$ έχουμε $\frac{1!}{(1-1)!1!} = 1 \in \mathbb{N}$ ✔

<u>επαγωγική υπόθεση:</u> υποθέτουμε ότι $\frac{n!}{(n-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα $0 \leq k \leq n$

<u>επαγωγικό βήμα:</u> δείχνουμε ότι $\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα $0 \leq k \leq n+1$

για $k = 0$ ισχύει διότι $\frac{(n+1)!}{(n+1-0)!0!} = 1 \in \mathbb{N}$

για $k > 0$ εχουμε:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1-k) \cdot n!}{(n+1-k)!k!} + \frac{k \cdot n!}{(n+1-k)!k!} = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!}}_{\in \mathbb{N}}$$

(ii) Απο το προηγούμενο ερώτημα, παρατηρήστε ότι ο $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ είναι φυσικός αριθμός που θα τον συμβολίζουμε ως $\binom{n}{k}$ (*διωνυμικός συντελεστής*). Δείξτε ότι

(α) $\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$

(β) $\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n$

(γ) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ και $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!)} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

(iii) Δείξτε ότι $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n!}{k!(n-k!)} + \frac{k}{n+1-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k!)}$$

$$= \binom{n}{k} + \frac{k}{n+1-k} \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = \binom{n}{k} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

(iv) Δείξτε με επαγωγή οτι οι διωνυμικοί συντελεστές είναι ακριβώς οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

βάση της επαγωγής: για $n=1$ $\quad (a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a+b$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n$$

$$+ \binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \cdots\cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$