ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1. Έστω σύνολα A, B, C. Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Άσκηση 2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Δώστε απόδειξη αν είναι σωστές ή αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος.

(i) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \subseteq C$ τότε $A \in C$.

(ii) A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \subseteq C$ τότε $A \subseteq C$.

(iii) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $B \in C$ τότε $A \subseteq C$.

(iv) Αν A, B, C είναι σύνολα με $A \in B$ και $B \in C$ τότε $A \in C$.

Άσκηση 3. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Venn στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Έχουμε δύο σύνολα A, B με $(A \cup B) \subseteq B$ και $B \nsubseteq A$.

(ii) Έχουμε τρία σύνολα A, B, C με $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ και $B \cap C \neq \emptyset$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ και $B \setminus A$ τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $A = [2, 4]$ και $B = (1, 3]$.

Αν $C = [0, 5)$ βρείτε επίσης το $(A \cap C) \cup B$

(ii) $A = \{a, f, X\}$ και $B = \{1, f, \emptyset, \{a\}\}$.

Άσκηση 5. Αν

$$\begin{aligned} G &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\} \\ H &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\} \\ I &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \text{ περιττός}\} \\ J &= \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 10\} \end{aligned}$$

βρείτε τα σύνολα $G \cup I$, $G \cap I$, $G \cap H$, $J \setminus G$, $I \setminus H$, $J \cap (G \setminus H)$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες αναφέροντας σε κάθε βήμα ποιες ταυτότητες από Θ. Συνόλων χρησιμοποιείτε. Τα σύνολα A, B θεωρούνται υποσύνολα του χώρου U.

(i) $B \cup (\emptyset \cap A) = B$

(ii) $(A^c \cap \Omega)^c = A$

(iii) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

(iv) $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c = B$

(v) $\big((A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)\big)^c = A$

(vi) $A \cap (A \cup B) = A$

(v)
$$\begin{aligned}\big((\mathrm{A^c} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A^c} \cup \mathrm{B^c})\big)^{\mathrm{c}} &= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cup B^c)^c \\ &= ((A^c)^c \cap B^c) \cup ((A^c)^c \cap (B^c)^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

Άσκηση 7. Κάνοντας χρήση της ισότητας $A \setminus B = A \cap B^c$, αποδείξτε ότι

(i) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(ii) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

(i) $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C} = (A \cap B^c) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c$

$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap C^c$

(ii)
$$(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C} = (A \cap B^c) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c$$

$$\begin{aligned}(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap C^c) \setminus (B \cap C^c) \\ &= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)^c \\ &= (A \cap C^c) \cap (B^c \cup (C^c)^c) \\ &= (A \cap C^c) \cap (B^c \cup C) \\ &= \big((A \cap C^c) \cap B^c\big) \cup \big((A \cap C^c) \cap C\big) \\ &= \big((A \cap C^c) \cap B^c\big) \cup \big(A \cap \emptyset\big) \\ &= \big((A \cap C^c) \cap B^c\big) \cup \emptyset \\ &= (A \cap C^c) \cap B^c\end{aligned}$$

Άσκηση 8. (i) Υπολογίστε τα σύνολα $A \triangle A, A \triangle \emptyset$.

Δείξτε τις επόμενες ιδιότητες της συμμετρικής διαφοράς συνόλων.

(ii) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(iii) $A \triangle B = B \triangle A$

(iv) $(A \triangle B) \triangle A = B$

(v) Με χρήση του (iv) δείξτε ότι αν $A \triangle B = A \triangle C$ τότε $B = C$.

(iv) $$(\mathrm{A}\triangle\mathrm{B})\triangle\mathrm{A} = \big[\underbrace{(A\triangle B)\setminus A}_{a}\big] \cup \big[\underbrace{A\setminus(A\triangle B)}_{b}\big]$$

$$\begin{aligned}
a &= \big((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big)\setminus A = \big((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\big)\cap A^c \\
&= \big((A\cap B^c)\cap A^c\big)\cup\big((B\cap A^c)\cap A^c\big) \\
&= \big(\emptyset\cap B^c\big)\cup(B\cap A^c) \\
&= \emptyset\cup(B\cap A^c) = (B\cap A^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= A\setminus(A\triangle B) \\
&= A\cap(A\triangle B)^c \\
&= A\cap\big((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big)^c \\
&= A\cap\big((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\big)^c \\
&= A\cap\big((A\cap B^c)^c\cap(B\cap A^c)^c\big) \\
&= A\cap\big((A^c\cup B)\cap(B^c\cup A)\big) \\
&= A\cap(A^c\cup B)\cap(B^c\cup A) \\
&= \big((A\cap A^c)\cup(A\cap B)\big)\cap(B^c\cup A) \\
&= \big(\emptyset\cup(A\cap B)\big)\cap(B^c\cup A) \\
&= (A\cap B)\cap(B^c\cup A) \\
&= (A\cap B\cap B^c)\cup(A\cap B\cap A) \\
&= (A\cap\emptyset)\cup(A\cap B) \\
&= \emptyset\cup(A\cap B) \\
&= (A\cap B)
\end{aligned}$$

$$a\cup b = (B\cap A^c)\cup(A\cap B) = B\cap(A\cup A^c) = B\cap U = B$$

Άσκηση 9. Υπολογίστε το δυναμοσύνολο των συνόλων $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$.

(i) $\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$

(ii) $\mathcal{P}(B) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{1, \{1\}\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{1, \{1\}\}\}, \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}, \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}\Big\}$

Άσκηση 10. Αν A, B σύνολα δείξτε τα ακόλουθα για τα δυναμοσύνολά τους

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

(iii) $\displaystyle\bigcap_{X\in\mathcal{P}(A)} X = \emptyset$

(iv) $\displaystyle A = \bigcup_{X\in\mathcal{P}(A)} X$

Άσκηση 11.

(i) Βρείτε άπειρη ακολουθία κλειστών κλειστών διαστημάτων που η τομή τους να είναι το $[2, 3]$

(ii) Βρείτε την τομή $\bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} (0, \epsilon)$.

(iii) Βρείτε την τομή $\bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} [0, \epsilon)$.

(i) Μία επιλογή τέτοιων διαστημάτων είναι $A_k = [2, 2 + k]$ με $k = 1, 2, 3, \ldots$
(ii) Η τομή αυτή είναι το κενό σύνολο. Για να το αποδείξουμε υποθέτουμε ότι υπαρχει $x \in \bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} (0, \epsilon)$.
Εφόσον $x \in (0, \epsilon)$ για κάθε $\epsilon > 0$, το x θα είναι θετικό, δηλ $x > 0$.
Επιλέγοντας $\epsilon = \frac{x}{2}$, θα πρέπει $x \in (0, \frac{x}{2})$. Δηλ. $0 < x < \frac{x}{2}$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, δεν υπαρχει $x \in \bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} (0, \epsilon)$.

Άσκηση 12. Αν $A_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k \text{ και } n \leq 2k\}$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots$, βρείτε την τομή $\cap_k A_k$ και την ένωση $\cup_k A_k$.

Άσκηση 13. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $A_n = [0, 1 - 2^{-n}]$ και $B_n = [0, 1 - 3^{-n}]$. Δείξτε ότι κάθε A_n είναι γνήσιο υποσύνολο του B_n αλλά $\cup_n A_n = \cup_n B_n$.

Θα δείξουμε ότι $\cup_n A_n = \cup_n B_n$.

Ο εγκλεισμος $\cup_n A_n \subseteq \cup_n B_n$ είναι αμεσος από το γεγονός ότι $A_n \subset B_n$ για κάθε n.
Επομένως, μένει να δείξουμε ότι $\cup_n B_n \subseteq \cup_n A_n$.
Εστω $x \in \cup_n B_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ωστε $x \in [0, 1 - 3^{-n_0}]$.
Μπορούμε να διαλέξουμε ενα n_0' αρκετά μεγαλύτερο από το n_0 έτσι ωστε $1 - 3^{-n_0} < 1 - 2^{1-n_0'}$ (πάρτε n_0' τετοιο ώστε $2^{n_0'} > 3^{n_0}$). Τότε $x \in [0, 1 - 2^{-n_0'}] = A_{n_0'}$ και συνεπως $x \in \cup_n A_n$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20

Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 1. Θεωρούμε τά σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ και $C = A \times B$.

(i) Γράψτε όλα τα στοιχεία του C

(ii) Σχεδιάστε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times C$

(iii) Ορίζουμε τη σχέση ρ μεταξύ των συνόλων A και C, με $x\,\rho\,(u, v)$ εάν $x > u$. Σημειώστε στο σχέδιο του $A \times C$ το υποσύνολο που ορίζει τη σχέση ρ.

Άσκηση 2. Αν S, T συλλογές συνόλων αποδείξτε ότι

(i) $(\bigcup_{A\in S} A) \times (\bigcup_{B\in T} B) = \bigcup_{A\in S, B\in T} (A \times B)$

(ii) $(\bigcap_{A\in S} A) \times (\bigcap_{B\in T} B) = \bigcap_{A\in S, B\in T} (A \times B)$

(i) Για τον εγκλεισμό $\subseteq$

Έστω $(x, y) \in (\bigcup_{A\in S} A) \times (\bigcup_{B\in T} B)$. Τότε $x \in \bigcup_{A\in S} A$ και $y \in \bigcup_{B\in T} B$.

Αρα, $x \in A$ για κάποιο $A \in S$ και $y \in B$ για κάποιο $B \in T$.
Επομένως, $(x, y) \in A \times B$ για κάποιο $A \in S$ και κάποιο $B \in T$. Δηλαδή, $(x, y) \in \bigcup_{A\in S, B\in T} (A \times B)$.

Για τον εγκλεισμό $\supseteq$ κάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα αντιστρόφως.

(ii) Όπως και το προηγούμενο, με τη μόνη διαφορά ότι αντικαθιστούμε την φράση *«για κάποιο»* με τη φράση *«για κάθε»*. □

Άσκηση 3. Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ πόσες σχέσεις ανάμεσα στο A και στο υπάρχουν;

Εξ' ορισμού, μία σχέση ανάμεσα στο A και στο είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $A \times B$.
Επομένως, αρκεί να μετρήσουμε το πλήθος των υποσυνόλων του $A \times B$.
Εχουμε αναφερεί ότι αν ένα σύνολο S έχει s στοιχεία, τότε to πλήθος των υποσυνόλων του είναι 2^s. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το $A \times B$ έχει $m \cdot n$ στοιχεία, επομένως το πλήθος των σχέσεων μεταξύ των A και B είναι $2^{m\cdot n}$.

Άσκηση 4. Στο σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ ορίζουμε τις εξής σχέσεις:

(i) $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$

(ii) $R_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$

(iii) $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

Σχεδιάστε to $A\times A$ και έπειτα δείτε ποια υποσύνολα του καρτεσιανου γινομένου είναι οι παραπάνω σχέσεις. Προσδιορίστε ποιές από αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, μεταβατικές.

Άσκηση 5. Θεωρούμε τις σχέσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ στο X. Δηλαδή, $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma} \subseteq X \times X$. Εάν οι $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές, εξετάστε ποιές από τις $\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho}\cap\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$, είναι επίσης συμμετρικές.

Θα δείξουμε οτι αν $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικές τότε και η $\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$ ειναι επίσης συμμετρική. Δηλαδή, υποθετουμε ότι $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$ και θα δείξουμε οτι $(y,x)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$.

Εφόσον $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$, θα έχουμε $(x,y)\in\boldsymbol{\rho}$ και $(x,y)\notin\boldsymbol{\sigma}$.
Λόγω συμμετρίας της $\boldsymbol{\rho}$, θα ισχύει ότι $\boxed{(y,x)\in\boldsymbol{\rho}}$.
Μπορούμε, λόγω συμμετρίας της $\boldsymbol{\sigma}$, να συμπερανουμε ότι $(y,x)\notin\boldsymbol{\sigma}$?
Ναι, αλλά πρέπει να το δικαιολογήσουμε: Αν ίσχυε $(y,x)\in\boldsymbol{\sigma}$, τότε λόγω συμμετρίας θα έπρεπε επίσης να ισχύει ότι $(x,y)\in\boldsymbol{\sigma}$, το οποίο δεν αληθεύει. Αρα, $\boxed{(y,x)\notin\boldsymbol{\sigma}}$.
Αρα, $(y,x)\in\boldsymbol{\rho}\setminus\boldsymbol{\sigma}$. □

Άσκηση 6. Μπορείτε να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που πρέπει να έχει μία (μη κενή) σχέση R στο $A=\{1,2,3\}$ ώστε να είναι ανακλαστική; συμμετρική; μεταβατική; (Θυμόμαστε ότι μια σχέση R σε σύνολο A είναι ένα υποσύνολο του $A\times A$.)

Άσκηση 7. Δίνονται παρακάτω μερικές σχέσεις στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε ποιές από αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, μεταβατικές.

(i) $x<y$

(ii) $x\geq y$

(iii) $|x-y|<1$

(iv) $|x-y|\leq 0$

(v) $x-y$ είναι ρητός

(vi) $x-y$ είναι άρρητος

Άσκηση 8. Εστω $\sim$ σχέση ισοδυναμίας σε σύνολο S. Γράφουμε $[x]$ για την κλάση ισοδυναμίας του $x\in S$. Δείξτε ότι

(i) $a\sim b$ αν και μόνο αν $[a]=[b]$

(ii) $a\sim b$ αν και μόνο αν $a\in[b]$

(iii) $a\sim b$ αν και μόνο αν $b\in[a]$

(i)
"$\Rightarrow$" Αν $a\sim b$ δείχνουμε ότι $[a]=[b]$.
Έστω $x\in[a]$. Τότε $a\sim x$. Από υπόθεση έχουμε ότι $a\sim b$. Επειδη η $\sim$ είναι σχεση ισοδυναμίας, θα είναι $x\sim a$ και απο μεταβατικότητα $x\sim a$ και $a\sim b$ μας δίνουν $x\sim b$, δηλαδή $x\in[b]$. Αρα $[a]\subseteq[b]$. Με τελείως όμοιο τρόπο προκυπτει ότι $[b]\subseteq[a]$. Επομένως, $[a]=[b]$.

"$\Leftarrow$" Αν $[a]=[b]$ δείχνουμε ότι $a\sim b$.
Εφοσον η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, ισχύει $a\sim a$. Αρα $a\in[a]$. Απο υποθεση έχουμε οτι $[a]=[b]$, αρα $a\in[b]$ και επομένως $b\sim a$ (αρα και $a\sim b$).

Άσκηση 9. Φτιάξτε τους πίνακες πολ/μου και πρόσθεσης των $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{10}$. Παρατηρήστε ότι στα $\mathbb{Z}_4$ και $\mathbb{Z}_{10}$ υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία που το γινόμενό τους κάνει μηδέν. Αυτό δεν συμβαίνει στα $\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_5$.
Γενικά, ισχύει το εξής:
Αν m είναι πρώτος αριθμός τότε $[k]_m \cdot [l]_m = [0]_m$ αν και μόνο αν είτε $[k]_m = [0]_m$ ή $[l]_m = [0]_m$.
Αν m είναι σύνθετος τότε υπάρχουν $[k]_m \neq [0]_m$ και $[l]_m \neq [0]_m$ ώστε $[k]_m \cdot [l]_m = [0]_m$.

Άσκηση 10. Στα επόμενα προβλήματα δίνονται σχέσεις σε σύνολα. Εξετάστε αν είναι σχέσεις ισοδυναμίας ή όχι και σε όσες είναι προσδιορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας με όσο πιο απλό τρόπο μπορείτε καθώς και την διαμέριση του συνόλου .

(i) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $|x| = |y|$,

(ii) Στο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν ((*Υπάρχει* $r \in Q$ *ώστε* $x = ry$)),

(iii) Στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $y/2 \leq x \leq 2y$,

(iv) Στο $\mathbb{N}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν ((*Υπάρχει* $n \in \mathbb{Z}$ *ώστε* $x = 2^n y$)),

(v) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$,

(vi) Στο $\mathbb{R}^*$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$,

(vii) Στο $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \sim (a, b)$ αν και μόνο αν $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$
(εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, +\infty)$, βλέπετε ποια είναι;)

(viii) Στο $\mathbb{Z}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $x^2 \equiv y^2 \pmod 4$,

(ix) Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(x, y) \sim (a, b)$ αν και μόνο αν ((*Υπάρχει* $\lambda > 0$ *ώστε* , $(x, y) = \lambda(a, b)$))
(εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 2\pi)$, βλέπετε ποια είναι ;)

(x) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Z}$, (εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 1)$, βλέπετε ποια είναι ;)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1. Υπάρχει κάποιο λάθος στην παρακάτω απόδειξη οτι εάν μία σχέση $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική; Εξηγήστε την απάντησή σας.

'Απόδειξη': Εστω $a \sim b$. Αφού η $\sim$ είναι συμμετρική, $b \sim a$. Αφού η $\sim$ είναι μεταβατική, από τα $a \sim b$ και $b \sim a$ συμπεραίνουμε $a \sim a$. Αρα η $\sim$ είναι ανακλαστική.

Το λάθος στην απόδειξη είναι ότι προυποθέτουμε την ύπαρξη κάποιου b τέτοιου ώστε $a \sim b$. Μπορεί όμως σε μία σχέση το a να μήν σχετίζεται με κανένα άλλο στοιχείο. $\square$

Άσκηση 2. Έστω $\mathbb{Z}_n$ το σύνολο των ακεραίων modulo n τα στοιχεία τού οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως a_n ή ως $[a]_n$, $a \in \mathbb{Z}$. Βρείτε τον ακέραιο r, με $0 \le r \le n-1$, για τον οποίο έχουμε:

(i) $126_{12} = r_{12}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$

(ii) $[-1]_{12} = r_{12}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$

(iii) $[-20]_8 = r_8$ στο $\mathbb{Z}_8$

(iv) $[-200]_9 = r_9$ στο $\mathbb{Z}_9$

(v) $325_3 + 223_3 = r_3$ στο $\mathbb{Z}_3$

(vi) $325_3 \cdot 223_3 = r_3$ στο $\mathbb{Z}_3$

(vii) $(322_3)^{189} = r_3$ στο $\mathbb{Z}_3$

(viii) $(323_3)^{189} = r_3$ στο $\mathbb{Z}_3$

(ix) $(11_5)^{728} = r_5$, στο $\mathbb{Z}_5$

(x) $(4_5)^{728} = r_5$ στο $\mathbb{Z}_5$

(xi) $(2_5)^{728} = r_5$ στο $\mathbb{Z}_5$

(i) $126_{12} = 6_{12}$

(ii) $[-1]_{12} = 11_{12}$

(iii) $[-20]_8 = 4_8$

(iv) $200 = 22 \cdot 9 + 2 \Rightarrow -200 = -22 \cdot 9 - 2 \Rightarrow [-200]_9 = [-22 \cdot 9]_9 + [-2]_9 = [-2]_9 = [7]_9$

(v) $325_3 + 223_3 = 1_3 + 1_3 = 2_3$

(vi) $325_3 \cdot 223_3 = 1_3 \cdot 1_3 = 1_3$

(viii) $(323_3)^{189} = (321_3 + 2_3)^{189} = (2_3)^{189} = [-1_3]^{189} = [(-1)^{189}]_3 = [-1]_3 = [2]_3$

(x) $(4_5)^{728} = ([-1]_5)^{728} = [(-1)^{728}]_5 = 1_5$

(xi) $(2_5)^{728} = \left((2_5)^2\right)^{364} = (4_5)^{364} = ([-1]_4)^{364} = [(-1)^{364}]_5 \ = 1_5$

Άσκηση 3. Θεωρούμε στο $\mathbb{Z}_{15}$ το στοιχείο 8_{15}. Δείξτε ότι υπάρχει (και βρείτε το!) ένα στοιχείο $a_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$ για το οποίο ισχύει ότι $a_{15} \cdot 8_{15} = 1_{15}$. Ισχύει το ίδιο για το στοιχείο 6_{15};

Άσκηση 4. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(i) Για κάθε περιττό ακεραιο a ισχύει ότι $a^2 \equiv_8 1$ (δηλ. $a^2 \equiv 1 \pmod 8$).

(ii) Για κάθε ακεραιο a ισχύει ότι $a^2 \equiv_8 0$ ή 1 ή 4 (δηλ. $a^2 \equiv 0, 1$ ή $4 \pmod 8$).

(i) Εφόσον a περιττός, γράφουμε $a = 2k + 1$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
Παίρνουμε δύο περιπτώσεις για το k:
Αν k αρτιος, τότε $k = 2\ell$ και $a^2 = (2k + 1)^2 = 8\ell^2 + 8\ell + 1 \equiv_8 1$
Αν k περιττός, τότε $k = 2\ell + 1$ και $a^2 = (2k + 1)^2 = (4\ell + 3)^2 = 16\ell^2 + 24\ell + 9 \equiv_8 1$
(ii) Από το προηγούμενο, αν a περιττός, τότε $a^2 \equiv_8 1$.
Αν $a = 2k$ αρτιος τότε $a^2 = 4k^2$, επομένως, οπως και πρίν, παίρνουμε δύο περιπτώσεις για το k:
Αν k αρτιος, τότε $k = 2\ell$ και $a^2 = 4k^2 = 4(2\ell)^2 = 16\ell^2 \equiv_8 0$
Αν k περιττός, τότε $k = 2\ell + 1$ και $a^2 = 4k^2 = 4(2\ell + 1)^2 = 16\ell^2 + 8\ell + 4 \equiv_8 4$ □

Άσκηση 5. Υπάρχει $a_6 \in \mathbb{Z}_6$ που να επαληθεύει την εξίσωση $4_6\, x = 3_6$ (δηλ. $4_6\, a_6 = 3_6$);

Άσκηση 6. Βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

(i) $x^2 = 1_4$ στο $\mathbb{Z}_4$

(ii) $x^4 = 1_5$ στο $\mathbb{Z}_5$

(iii) $x^2 + 3_6\, x + 2_6 = 0_6$ στο $\mathbb{Z}_6$

(iii) Μπορείτε να βρείτε τις λύσεις κάνοντας δοκιμές:

για $x = [0]_6$ είναι: $0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \not\equiv_6 0$
για $x = [1]_6$ είναι: $1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 6 \equiv_6 0$
για $x = [2]_6$ είναι: $2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12 \equiv_6 0$
για $x = [3]_6$ είναι: $3^2 + 3 \cdot 3 + 2 = 20 \not\equiv_6 0$
για $x = [4]_6$ είναι: $4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 30 \equiv_6 0$
για $x = [5]_6$ είναι: $5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 42 \equiv_6 0$

Αρα η εξίσωση (παρόλο που είναι δευτεροβάθμια) έχει τέσσερις λύσεις! Τις $x \equiv_6 1$, $x \equiv_6 2$, $x \equiv_6 4$ και $x \equiv_6 5$.

Ενας άλλος τρόπος να εντοπισουμε λύσεις (αυτός ο τροπος κυρίως εξυπηρετεί όταν το n είναι αρκετα μεγάλο για να κανουμε δοκιμες) είναι ο εξης:
Εχουμε $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Επομένως, λύνουμε την $(x + 1)(x + 2) \equiv_6 0$. Σιγουρα έχουμε τις λύσεις $x + 1 \equiv_6 0$ και $x + 2 \equiv_6 0$. Αυτές δίνουν $x \equiv_6 -1 \equiv_6 5$ και $x \equiv_6 -2 \equiv_6 4$.

Αλλά επίσης, εφόσον $2 \cdot 3 \equiv_6 0$ θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τις περιπτώσεις όπου
($x + 1 \equiv_6 2$ και $x + 2 \equiv_6 3$) και ($x + 1 \equiv_6 3$ και $x + 2 \equiv_6 2$).

$\left.\begin{array}{l} x + 1 \equiv_6 2 \text{ και} \\ x + 2 \equiv_6 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x \equiv_6 1 \text{ και} \\ x \equiv_6 1 \end{array}\right\}$ δηλαδή $x \equiv_6 1$ (που την βρήκαμε και πριν με τις δοκιμές).

$\left.\begin{array}{l} x + 1 \equiv_6 3 \text{ και} \\ x + 2 \equiv_6 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x \equiv_6 2 \text{ και} \\ x \equiv_6 0 \end{array}\right\}$ το οποιο είναι αδύνατον, επομενως δεν δίνει κάποια λύση.

Επίσης, εφόσον $3 \cdot 4 \equiv_6 0$ θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τις περιπτώσεις όπου

$(x+1 \equiv_6 3$ και $x+2 \equiv_6 4)$ και $(x+1 \equiv_6 4$ και $x+2 \equiv_6 3)$.

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \equiv_6 3 \text{ και} \\ x+2 \equiv_6 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \equiv_6 2 \text{ και} \\ x \equiv_6 2 \end{array}\right\} \text{δηλαδή } x \equiv_6 2 \text{ (που την βρήκαμε και πριν με τις δοκιμές).}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \equiv_6 4 \text{ και} \\ x+2 \equiv_6 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \equiv_6 3 \text{ και} \\ x \equiv_6 1 \end{array}\right\} \text{το οποιο είναι αδύνατον, επομενως δεν δίνει κάποια λύση.}$$

Άσκηση 7. Στο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τις σχέσεις ισοτιμίας $\equiv_4$ και $\equiv_6$. Δείξτε ότι η σχεση $\equiv_4 \cap \equiv_6$ είναι ίση με την σχέση $\equiv_n$, για κάποιον φυσικό αριθμό n τον οποίο πρεπει να βρείτε.

Άσκηση 8. Αν οι $\rho, \hat{\rho}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας σε σύνολο S, τότε είναι οι σχέσεις $\rho \cap \hat{\rho}$, $\rho \cup \hat{\rho}$ και $\rho \setminus \hat{\rho}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας; Τι συμβαίνει αν οι αρχικές σχέσεις είναι σχέσεις ολικής διάταξης;

• Η σχεση $\rho \cap \hat{\rho}$ είναι σχεση ισοδυναμίας. Συμβολιζουμε για συντομία με $\sim$ τη σχεση $\rho \cap \hat{\rho}$ και ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες

Ανακλαστική: $a \sim a \Leftrightarrow (a\,\rho\,a$ και $a\,\hat{\rho}\,a)$, το οποίο ισχύει από την ανακλαστικότητα των ρ και $\hat{\rho}$.

Συμμετρική: Αν $a \sim b$ τότε $(a\,\rho\,b$ και $a\,\hat{\rho}\,b)$. Απο συμμετρικότητα των ρ και $\hat{\rho}$ έχουμε $b\,\rho\,a$ και $a\,\hat{\rho}\,b$ και συνεπώς $b \sim a$

Μεταβατική: Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τοτε $(a\,\rho\,b$ και $a\,\hat{\rho}\,b)$ και $(b\,\rho\,c$ και $b\,\hat{\rho}\,c)$. Απο μεταβατικότητα των ρ και $\hat{\rho}$ έχουμε $a\,\rho\,c$ και $a\,\hat{\rho}\,c$, δηλαδή $a \sim c$

• Η σχεση $\rho \cup \hat{\rho}$ δεν είναι σχεση ισοδυναμίας.

Πάρετε για παράδειγμα ρ να είναι η σχεση $\equiv_2$, $\hat{\rho}$ να είναι η σχεση $\equiv_3$ και συμβολίστε με $\sim$ τη σχέση $\rho \cup \hat{\rho}$. Τότε $a \sim b$ σημαίνει $a \equiv_2 b$ ή $a \equiv_3 b$.

Η σχεση $\sim$ δεν είναι μεταβατική. Π.χ. Ισχύει $2 \sim 5$ διότι $2 \equiv_3 5$, επίσης $5 \sim 7$ διότι $5 \equiv_2 7$, όμως δεν ισχύει $2 \sim 7$ διότι καμία απο τις ισοδυναμίες $2 \equiv_2 7$ ή $2 \equiv_3 7$ δεν είναι αληθής.

• Η σχεση $\rho \setminus \hat{\rho}$ δεν είναι σχεση ισοδυναμίας διότι δεν είναι ανακλαστική.

Συμβολίζουμε και πάλι με $\sim$ τη σχέση $\rho \setminus \hat{\rho}$. Τοτε $a \sim b$ σημαίνει $(a\,\rho\,b$ και όχι $a\,\hat{\rho}\,b)$.
Αν η $\sim$ ήταν ανακλαστική, θα είχαμε $a \sim a$ δηλαδή $(a\,\rho\,a$ και οχι $a\,\hat{\rho}\,a)$. Ομως αυτό δεν μπρορεί ποτέ να είναι αληθές, διότι λόγω της ανακλαστικότητας της $\hat{\rho}$ για όλα τα a ισχύει $a\,\hat{\rho}\,a$.

Άσκηση 9. Αν R σχέση ολικής διάταξης σε σύνολο A, δείξτε ότι η αντίστροφη σχέση R^{-1} είναι επίσης σχέση ολικής διάταξης.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $B = \{1,2,6,24,72\}$. Εξετάστε αν η σχέση $a\,\rho\,b$ αν και μόνον αν $a \mid b$, ορίζει σχέση μερικής διάταξης στα παραπάνω σύνολα. Αν ναι, είναι η μερική διάταξη αυτή ολική?

Άσκηση 11. Στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις

(i) $(a,b) \preceq_1 (a',b')$ αν και μονον αν $a+b \leq a'+b'$.

(ii) $(a,b) \preceq_2 (a',b')$ αν και μονον αν $ab \leq a'b'$.

(iii) $(a,b) \preceq_3 (a',b')$ αν και μονον αν $a \leq a'$ και $a+b \leq a'+b'$.

Εξετάστε ποιές από τις παραπάνω σχεσεις ορίζουν σχέση μερικής ή ολικής διάταξης στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Η σχέση $\preceq_1$ δεν είναι σχέση διάταξης (ούτε μερικής και συνεπώς ούτε ολικής), διότι δεν είναι αντισυμμετρική. Για παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{lll} (1,3) \preceq_1 (2,2) & \text{διότι} & 1+3 \leq 2+2 \\ (2,2) \preceq_1 (1,3) & \text{διότι} & 2+2 \leq 1+3 \end{array}\right\} \text{όμως } (1,3) \neq (2,2)$$

(ii) Η σχέση $\preceq_2$ δεν είναι σχέση διάταξης (ούτε μερικής και συνεπώς ούτε ολικής), διότι δεν είναι αντισυμμετρική. Για παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{lll} (1,2) \preceq_2 (2,1) & \text{διότι} & 1\cdot 2 \leq 2\cdot 1 \\ (2,1) \preceq_2 (1,2) & \text{διότι} & 2\cdot 1 \leq 1\cdot 2 \end{array}\right\} \text{όμως } (1,2) \neq (2,1)$$

(iii) Η σχέση $\preceq_3$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

Ειναι ανακλαστική: $a \preceq_3 a$ διότι αληθευεί ότι $a \leq a$ και $a + a \leq a + a$.

Ειναι μεταβατική:
Αν $(a, b) \preceq_3 (a', b')$ και $(a', b') \preceq_3 (a'', b'')$ τότε
$(a \leq a'$ και $a + b \leq a' + b')$ και $(a' \leq a''$ και $a' + b' \leq a'' + b'')$.
Επομένως, $a \leq a''$ και $a + b \leq a'' + b''$. Συνεπώς $(a, b) \preceq_3 (a'', b'')$.

Ειναι αντισυμμετρική: Αν $(a, b) \preceq_3 (a', b')$ και $(a', b') \preceq_3 (a, b)$ τότε
$(a \leq a'$ και $a + b \leq a' + b')$ και $(a' \leq a$ και $a' + b' \leq a + b)$.
Συνεπώς $a = a'$ και $a + b = a' + b'$. Αρα $a = a'$ και $b = b'$, δηλαδή $(a, b) = (a', b')$.

Άσκηση 12. Θεωρούμε στο σύνολο $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ την σχέση $a \,\rho\, b$ εαν και μόνον εάν $a \mid 2b$. Οριζει κάποια μερική διάταξη η παραπάνω σχέση και αν ναι είναι ολική;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1. Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ και $f : A \to B$ με

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 3.$$

Βρείτε τά $f(\{a, b\})$, $f(\{b, c\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(\{1, 2\})$.

Άσκηση2. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις ελέγξτε εάν υπάρχει δεξιό αντίστροφο ή/και αριστερό αντίστροφο, και εάν υπάρχει βρείτε το.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x + 2,$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) = x^2.$

(iii) Βρείτε τα σύνολα $f([-1, 1])$, $f^{-1}([0, 2])$, $g([-3, 2])$ και $g^{-1}([2, 4])$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\,|x|$ είναι 1-1 και επί. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Άσκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = (x + 1)^2$.

(i) Σχεδιάστε το γράφημα της f.

(ii) Προσδιορίστε τα σύνολα $B = f(\mathbb{R}),\ f^{-1}([1, 4]),\ f^{-1}(-2),\ f^{-1}([-2, 0))$.

(iii) Βρείτε δύο διαφορετικά δεξιά αντίστροφα της $f : \mathbb{R} \to B$.

(iv) Βρείτε δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, A_1 και A_2, τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ και $f|_{A_i}$, για $i = 1, 2$, να είναι ένα προς ένα. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ένα αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_i} : A_i \to \mathbb{R}$. (Σημείωση: Ως $f|_{A_i}$ συμβολίζουμε τον περιορισμό της f στο A_i, δηλ. το πεδίο ορισμού της f είναι το υποσύνολο $A_i \subset \mathbb{R}$).

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to B$ και υποσύνολα $U \subseteq A,\ \subseteq B$. Δείξτε ότι $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ και $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Τα παρακάτω είναι κάποιες παρατηρήσεις που μπορείτε να χρησιμοποιείτε γενικως.
Θυμηθείτε τους ορισμούς:

$$f(U) = \{f(x) : x \in U\} \tag{1}$$
$$f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\} \tag{2}$$

Από το (1) προκύπτουν τα εξής:

Αν $x \in U$ τοτε $f(x) \in f(U)$
Αν $y \in f(U)$ τοτε υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$

Από το (2) προκύπτουν τα εξής:

Αν $x \in f^{-1}(Y)$ τοτε $f(x) \in Y$
Αν $f(x) \in Y$ τοτε $x \in f^{-1}(Y)$

• Για το $U \subseteq f^{-1}(f(U))$:

Εστω $x \in U$. Τότε $f(x) \in f(U)$. Θέτοντας $f(U) = Y$, εχουμε ότι $x \in f^{-1}(Y)$, δηλαδή $x \in f^{-1}\big(f(U)\big)$

• Για το $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$:

Εστω $y \in f(f^{-1}(Y))$. Τότε υπάρχει $x \in f^{-1}(Y)$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$.
Ομως, αφού $x \in f^{-1}(Y)$, τότε $f(x) \in Y$ και συνεπως $y = f(x) \in Y$.

Άσκηση 6. Αν f, g, h οι συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς με:

$$f(n) = n+1, \quad g(n) = 2n, \quad h(n) = \begin{cases} 0 \text{ αν } n \text{ αρτιος} \\ 1 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases},$$

να βρείτε τις $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ και $(f \circ g) \circ h$.

Άσκηση 7. Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη; Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική ή μεταθετική.

(i) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$,

(ii) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$,

(iii) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ με $a \star b = a^b$,

(iv) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$,

(v) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|\, b$,

(vi) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ με $a \star b = 2^{ab}$,

(vii) Στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a \star b = \max(a, b)$.

(viii) Στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a \star b = a + b + a \cdot b$.

Για να ορίζει ο "κανόνας" $\star$ διμελή πράξη στο σύνολο A πρέπει $a \star b \in A$ *για κάθε* $(a, b) \in A \times A$. Εφόσον ορίζεται πράξη, η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική εάν $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ για κάθε $a, b, c \in A$. Η πράξη είναι μεταθετική εάν $a \star b = b \star a$ για κάθε $a, b \in A$.

(i) Δεν ορίζεται το $a \star 0$ για κανένα $a \in \mathbb{Q}$, οπότε η $\star$ δεν είναι διμελής πράξη στο $\mathbb{Q}$.

(ii) Παρατηρούμε ότι $a \star b = a^b \in \mathbb{N}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$. Άρα ορίζεται διμελής πράξη. Η πράξη δεν είναι μεταθετική, αφού $1 \star 2 = 1^2 = 1$ ενώ $2 \star 1 = 2^1 = 2$. Η πράξη δεν είναι ούτε προσεταιριστική, αφού $(a \star b) \star c = a^b \star c = (a^b)^c = a^{bc}$, ενώ $a \star (b \star c) = a^{b \star c} = a^{b^c}$ και αυτοί οι δύο αριθμοί, γενικά, δεν είναι ίσοι. Για παράδειγμα, $(2 \star 3) \star 2 = 2^6$, ενώ $2 \star (3 \star 2) = 2^9$.

(iii) Ορίζεται διμελής πράξη στο $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, η οποία δεν είναι ούτε μεταθετική, ούτε προσεταιριστική. Τα αντιπαραδείγματα του ερωτήματος (ii) είναι αντιπαραδείγματα και εδώ.

(iv) Για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$, έχουμε $a \star b = ab + 1 \in \mathbb{Q}$, οπότε ορίζεται διμελής πράξη. Η πράξη είναι μεταθετική. Πραγματικά,

$$a \star b = ab + 1 = ba + 1 = b \star a.$$

Όμως δεν είναι προσεταιριστική:

$$(a \star b) \star c = (ab+1) \star c = (ab+1)c + 1 = abc + c + 1,$$

ενώ

$$a \star (b \star c) = a \star (bc+1) = a(bc+1) + 1 = abc + a + 1,$$

τα οποία δεν είναι ίσα εάν $a \neq c$. Για παράδειγμα, $(1 \star 2) \star 3 = 10$ ενώ $1 \star (2 \star 3) = 8$.

(v) Για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$, έχουμε $a \star b = |a|b \in \mathbb{Q}$, οπότε ορίζεται διμελής πράξη. Η πράξη δεν είναι μεταθετική: $(-1) \star 1 = |-1| \cdot 1 = 1$, ενώ $1 \star (-1) = |1| \cdot (-1) = -1$. Είναι όμως προσεταιριστική:

$$(a \star b) \star c = |a \star b|c = ||a|b|c = |a||b|c$$

και επίσης,

$$a \star (b \star c) = |a| \cdot (b \star c) = |a||b|c.$$

(vi) Δεν ορίζεται πράξη στο $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Για παράδειγμα, $1 \star (-1) = 2^{-1} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(vii) Ορίζεται πράξη στο $\mathbb{R}$, αφού $\max(a,b) \in \mathbb{R}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Η πράξη είναι μεταθετική, αφού $\max(a,b) = \max(b,a)$ και είναι επίσης προσεταιριστική, αφού

$$\max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c) = \max(a, \max(b,c)).$$

(viii) Ορίζεται πράξη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι μεταθετική, αφού

$$a \star b = a + b + ab = b + a + ba = b \star a.$$

Είναι επίσης προσεταιριστική. Δείξτε το!

Άσκηση 8. Έστω $f : A \to B$. Δείξετε ότι:

(i) αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ τότε $f(X_1) \subseteq f(X_2)$

(ii) αν $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$ τότε $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς:

$$\text{Για } X \subseteq A, \quad f(X) = \{f(x) \ : \ x \in X\}.$$

$$\text{Για } Y \subseteq B, \quad f^{-1}(Y) = \{x \in A \ : \ f(x) \in Y\}.$$

(i) Έστω τυχόν $y \in f(X_1)$. Τότε $y = f(x)$ για κάποιο $x \in X_1$. Όμως $X_1 \subseteq X_2$, οπότε $x \in X_2$. Άρα $y \in f(X_2)$. Συνεπώς $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.

(ii) Έστω τυχόν $x \in f^{-1}(Y_1)$. Τότε $f(x) \in Y_1$. Όμως $Y_1 \subseteq Y_2$, οπότε $f(x) \in Y_2$. Άρα $x \in f^{-1}(Y_2)$. Συνεπώς $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

Άσκηση 9. Εστω συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$.

(i) Να δείξτε ότι αν f, g είναι 1-1 τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1.

(ii) Να δείξτε ότι αν f, g είναι επί τότε και η $g \circ f$ είναι επί.

(i) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g\circ f : A \to C$ είναι 1-1, θα δείξουμε ότι αν $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) &\implies [\text{ορισμός της σύνθεσης}]\\ g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\implies [\text{η } g \text{ είναι 1-1}]\\ f(x_1) = f(x_2) &\implies [\text{η } f \text{ είναι 1-1}]\\ x_1 = x_2. \end{aligned}$$

(ii) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g\circ f : A \to C$ είναι επί, θα δείξουμε ότι για κάθε $z \in C$ υπάρχει κάποιο $x \in A$ τέτοιο ώστε $g\circ f(x) = z$. Έστω το τυχόν $z \in C$. Η g είναι επί, άρα υπάρχει κάποιο $y \in B$ τέτοιο ώστε $z = g(y)$. Η f είναι επί, άρα υπάρχει κάποιο $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Τότε όμως $z = g(y) = g(f(x)) = g\circ f(x)$.

Άσκηση 10. Αν $f : X \to Y$ και $(A_t)_{t\in T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X, δείξτε ότι:

(i) $f\big(\bigcup_{t\in T} A_t\big) = \bigcup_{t\in T} f(A_t)$

(ii) $f\big(\bigcap_{t\in T} A_t\big) \subseteq \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

(iii) Αν η f είναι 1-1 τότε $f\big(\bigcap_{t\in T} A_t\big) = \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

Άσκηση 11. Μια ακολουθία συνόλων A_n με $n \in \mathbb{N}$ λέγεται φθίνουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $A_{n+1} \subseteq A_n$.

(i) Δείξτε οι αν A_n είναι φθίνουσα τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

(ii) Δείξτε ότι αν A_n, B_n είναι φθίνουσες ακολουθίες συνόλων τότε

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n \cup B_n) = \Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\Big)$$

(ii) «$\supseteq$» Δείχνουμε ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n \cup B_n) \supseteq \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$.
Εστω $x \in \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$. Τοτε $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ για κάθε $n \geq 0$ ή $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ για κάθε $n \geq 0$. Και συνεπώς, και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι $x \in \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$

«$\subseteq$» Δείχνουμε ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n \cup B_n) \subseteq \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$.
Εστω $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n \cup B_n)$. Τότε $x \in A_n \cup B_n$ για κάθε $n \geq 0$. Χωρίζουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $x \in A_n$ για κάθε $n \geq 0$ τότε ισοδύναμα $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ και συνεπως $x \in \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$

2η περίπτωση: Αν $x \notin A_n$ για κάθε $n \geq 0$ τότε υπάρχει κάποιο n_0 τέτοιο ώστε $x \notin A_{n_0}$. Λογω φθίνουσας ακολουθίας, συμπεραίνουμε ότι $x \notin A_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Εφοσον όμως εχουμε ότι $x \in A_n \cup B_n$ για κάθε $n \geq 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $x \in B_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Ισοδύναμα, $x \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} B_n$ το οποίο, λόγω του ερωτήματος (i), μας οδηγεί στο $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$. Προφανώς, αν $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ τότε και $x \in \big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\big)\bigcup\big(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\big)$, και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Άσκηση 12. Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι:

(i) 1-1 αλλά όχι επί

(ii) επί αλλά όχι 1-1

(iii) ούτε 1-1 ούτε επί

(iv) και επί και 1-1 (δηλ. αμφιμονοσήμαντη)

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $f(x) = 2x$

(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $f(x) = [\frac{x}{2}]$, όπου με $[a]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του a

(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $f(x) = x^2$

(iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $f(x) = x + 3$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1. Κατασκευάστε πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις

(i) $P \Rightarrow \neg P$

(ii) $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$

(iii) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

(iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Άσκηση 2. Έστω ότι η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ψευδής. Τότε βρείτε την τιμή αληθείας των προτάσεων

(i) $P \wedge Q$

(ii) $P \vee Q$

(iii) $Q \Rightarrow P$

Άσκηση 3. Δύο προτάσεις λέγονται *λογικά ισοδύναμες* αν έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων αντιστοιχούν σε λογικά ισοδύναμες προτάσεις.

(i) $\neg(P \wedge Q)$ και $(\neg P) \vee (\neg Q)$

(ii) $\neg(P \vee Q)$ και $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

(iii) $\neg(P \wedge (\neg P))$ και $P \vee (\neg P)$

(iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ και $P \Rightarrow Q$

(v) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ και $(P \vee Q) \Rightarrow R$

(vi) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ και $P \Rightarrow (Q \wedge R)$

(vii) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ και $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

(viii) $P \Rightarrow Q$ και $\neg(P \vee Q)$

(ix) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg P) \vee Q$

(x) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg P) \wedge Q$

(xi) $P \Rightarrow Q$ και $(\neg Q) \wedge P$

Άσκηση4. Για τα επόμενα ζευγάρια προτάσεων εξετάστε αν είναι ισοδύναμα ή αν ένα από τα δύο συνεπάγεται το άλλο. (Φτιάξτε πίνακες αληθείας όπου χρειάζεται.)

(i) $P \Rightarrow Q$ και $\neg P \wedge Q$

(ii) $P \Leftrightarrow Q$ και $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$

(iii) $\neg Q \Rightarrow P$ και $\neg P \Rightarrow \neg Q$

(iv) $P \wedge \neg Q$ και $(\neg P) \vee (\neg Q)$

Άσκηση 5. Δώστε τις αντίστροφες και τις αντιθετοαντίστροφες των παρακάτω προτάσεων. Ποιές προτάσεις είναι ισοδύναμες;

(i) Αν ένα μωρό δεν κλαίει τότε είναι χαρούμενο

(ii) Αν ένα μωρό κλαίει τότε δεν είναι χαρούμενο

(iii) Ένα μωρό κλαίει αν δεν είναι χαρούμενο

Άσκηση 6. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:

$p =$ *«Ο Άγγελος πηγαίνει στο πάρτυ»* $q =$ *« Η Βάσω πηγαίνει στο πάρτυ»*

$r =$ *« Η Γεωργία πηγαίνει στο πάρτυ»* $s =$ *« Ο Δημήτρης πηγαίνει στο πάρτυ»*

α) Να μετατραπουν σε προτάσεις λογικής οι ακόλουθες εκφράσεις:

(i) «Ο Δημήτρης δεν πάει στο πάρτυ χωρίς τη Βάσω»

$\neg q \Rightarrow \neg s$

(ii) «Η Γεωργία θα πάει στο πάρτυ αν και μόνο αν δεν πάνε ο Άγγελος και η Βάσω»

$r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(iii) «Αν ο Δημήτρης πάει στο πάρτυ, τότε ο Άγγελος θα πάει εφόσον δεν πάει η Γεωργία»

$s \Rightarrow (\neg r \Rightarrow p)$

β) Να αποδοθούν σε φυσική γλώσσα οι ακόλουθες προτάσεις

(i) $s \Rightarrow (\neg r \Rightarrow p)$

«Αν παει ο Δημήτρης τότε, αν δεν παει η Γεωργία θα παει ο Άγγελος.»

(ii) $(r \Rightarrow \neg s) \wedge (s \Rightarrow \neg q)$

«Αν πάει η Γεωργία, ο Δημήτρης δεν θα παει, και αν πάει ο Δημήτρης δεν θα πάει η Βάσω στο πάρτυ.»

(iii) $(q \vee r \vee s) \Rightarrow p$

«Αν πάει έστω ένας από τους Βάσω, Γεωργία, Δημήτρη, τότε θα πάει και ο Άγγελος.»

(iv) $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$

«Αν δεν πάνε οι Άγγελος και Βάσω, αλλά πάει η Γεωργία, τότε θα πάει ο Δημήτρης.»

Άσκηση 7. Τρείς ύποπτοι Α, Β, Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:

Ο Α λέει: *ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος*

Ο Β λέει: *αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος*

Ο Γ λέει: *είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος*

Συμβολίζουμε με p, q, r τις προτάσεις: p: *«ο Α είναι αθώος»* q: *«ο Β είναι αθώος»* r: *«ο Γ είναι αθώος»*

(i) Γραψτε τις τρείς καταθέσεις σε μορφή προτάσεων λογικής

(ii) Μπορούν και οι τρείς καταθέσεις να είναι αληθείς; Αν ναι, τότε ποιός είναι αθώος και ποιός ένοχος;

(iii) Αν και οι τρείς είναι αθώοι, ποιός έδωσε ψευδή κατάθεση;

(iv) Αν ο αθώος λέει αλήθεια και ο ένοχος ψέματα, τότε ποιός λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

(i) Οι καταθέσεις των Α,Β,Γ είναι οι εξής:

p: ο Α είναι αθώος q: ο Β είναι αθώος r: ο Γ είναι αθώος

Η κατάθεση του A: $(\neg q) \wedge r$

Η κατάθεση του B: $\neg p \Rightarrow \neg r$

Η κατάθεση του Γ: $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Για να απαντησουμε τα (ii)-(iv) φτιάχνουμε τον πίνακα αληθείας των τριών καταθέσεων:

	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	$(\neg q) \wedge r$	$\neg p \Rightarrow \neg r$	$r \wedge (\neg p \vee \neg q)$
1η γραμμη	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
2η γραμμη	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
3η γραμμη	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
4η γραμμη	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
5η γραμμη	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
6η γραμμη	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
7η γραμμη	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
8η γραμμη	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ

(ii) Στην 3η γραμμή του πίνακα είναι και οι τρείς καταθέσεις αληθείς. Αυτή η γραμμή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι Α και Γ είναι αθώοι και ο Β ένοχος.
(ii) Στην 1η γραμμή του πίνακα είναι και οι τρείς υποπτοι αθώοι. Αυτή η γραμμή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι Α και Γ λένε ψέματα ενώ ο Β λέει αλήθεια.
(iii) Η 7η γραμμή του πίνακα είναι η μοναδική στην οποια ισχύει οτι «όποιος είναι αθώος λέει αλήθεια» και «όποιος λέει ψέματα είναι ενοχος». Αυτή η γραμμή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι Α και Γ είναι ένοχοι (και ψεύτες) και ο Β είναι αθώος (και έντιμος).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 1. Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και εξετάστε αν είναι σωστές:

(i) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει πραγματικός αριθμός y ώστε $x = y^3$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ :\ x = y^3$ A (αληθές)

(ii) Υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x, το άθροισμα $x + y$ είναι θετικό.

$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ x + y > 0$ Ψ (ψευδές)

(iii) Για κάθε άρρητο αριθμό x υπάρχει φυσικός n ώστε $x < n < x + 1$.

$\forall x\big(\neg(x \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}\ :\ x < n < x + 1)\big)$ Ψ

π.χ. το $-\sqrt{2}$ είναι άρρητος, όμως δεν υπάρχει φυσικός n με $-\sqrt{2} < n < -\sqrt{2} + 1$

(iii′) Για κάθε θετικό άρρητο αριθμό x υπάρχει φυσικός n ώστε $x < n < x + 1$.

$\forall x\Big(\big((x > 0) \wedge \neg(x \in \mathbb{Q})\big) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}\ :\ x < n < x + 1)\Big)$ A

(iv) Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 όταν διαιρεθεί με το 4.

$\forall x \in \mathbb{Z}\ \big((x^2 = 0 \mod 4) \vee (x^2 = 1 \mod 4)\big)$ A (εξηγήστε γιατί)

(v) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πρώτων αριθμών διαφορετικών απο το 2 είναι άρτιος αριθμός (Το σύνολο των πρώτων αριθμών συμβολίζεται με $\mathcal{P}$.)

$\forall x \in \mathcal{P}\ \forall y \in \mathcal{P}\ \Big(\big((x \neq 2) \wedge (y \neq 2)\big) \Rightarrow 2|(x^2 + y^2)\Big)$ A (διότι όλοι οι πρώτοι διαφορετικοί του 2 είναι περιττοί αριθμοί)

(vi) Κάθε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός έχει αντίστροφο.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \big(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R} :\ x \cdot y = 1)\big)$ A

(vii) Ένας 2 επί 2 πραγματικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του δεν είναι 0. (το σύνολο των 2 επί 2 πραγματικών πινάκων συμβολίζεται με $M_2(\mathbb{R})$).

$\forall A \in M_2(\mathbb{R})\Big(\big(\exists B \in M_2(\mathbb{R}) : A \cdot B = \mathrm{Id}\big) \Leftrightarrow \neg(\det(A) = 0)\Big)$ A

Άσκηση 2. Γραψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα. Μετά γράψτε την άρνηση για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και, επίσης, διατυπώστε την με λόγια.
Ποιά είναι σωστή: η πρόταση ή η άρνησή της;

Θυμηθείτε και χρησιμοποιήστε το εξής: το $p \Rightarrow q$ είναι ισοδύναμο με $\neg p \vee q$.
Επομενως, το $\neg(p \Rightarrow q)$ είναι ισοδύναμο με το $p \wedge \neg q$

(i) Για κάθε p πρώτο αριθμό, είτε p είναι περιττός είτε $p = 2$.

πρόταση: $\forall x \in \mathcal{P} \left((x = 2) \vee (\exists k \in \mathbb{Z} \,:\, x = 2k + 1)\right)$ A

αρνηση: $\exists x \in \mathcal{P} \,\neg\left((x = 2) \vee (\exists k \in \mathbb{Z} \,:\, x = 2k+1)\right)$ ή $\exists x \in \mathcal{P} \left((x \neq 2) \wedge (\forall k \in \mathbb{Z} \,:\, x \neq 2k+1)\right)$
Υπάρχει πρώτος αριθμός ο οποίος δεν είναι ούτε ίσος με 2 ούτε περιττός Ψ

(ii) Για κάθε ζώο x, αν x είναι τίγρης τότε το x έχει ρίγες και νύχια.

Z:= το σύνολο των ζώων, T:= το σύνολο των τίγρεων,
P:= το σύνολο των ζωων με ρίγες, N:= το σύνολο των ζωων με νυχια

πρόταση: $\forall x \in \mathrm{Z}\Big(x \in \mathrm{T} \Rightarrow \left((x \in \mathrm{P}) \wedge (x \in \mathrm{N})\right)\Big)$

αρνηση: $\exists x \in \mathrm{Z}\Big(x \in \mathrm{T} \wedge \neg\left((x \in \mathrm{P}) \wedge (x \in \mathrm{N})\right)\Big)$ ή $\exists x \in \mathrm{Z}\Big(x \in \mathrm{T} \wedge \left(\neg(x \in \mathrm{P}) \vee \neg(x \in \mathrm{N})\right)\Big)$
Υπάρχει ζώο το οποίο είναι τίγρης και δεν έχει ρίγες ή δεν έχει νύχια A (ΥΠΑΡΧΕΙ τέτοια τίγρης!!!)Tiger-born-with-no-stripes

(iii) Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y, αν $x^2 = y^2$ τότε $x = y$.

πρόταση: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \left((x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)\right)$ Ψ

αρνηση: $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \left((x^2 = y^2) \wedge (x \neq y)\right)$ A
Υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί των οποίων τα τετράγωνα είναι ίσα, όμως αυτοί δεν είναι ίσοι

(iv) Το γινόμενο ενός άρρητου με ένα ρητό είναι άρρητος.

πρόταση: $\forall x \forall y\big(\neg(x \in \mathbb{Q}) \wedge (y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \neg(x \cdot y \in Q)\big)$ A

αρνηση: $\exists x \exists y\Big(\big(\neg(x \in \mathbb{Q}) \wedge (y \in \mathbb{Q})\big) \wedge (x \cdot y \in Q)\Big)$ Ψ
Υπάρχουν άρρητος και ρητός των οποίων το γινόμενο είναι ρητός

Άσκηση 3. Γράψτε την άρνηση κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) $\forall x \,:\, (P(x) \wedge Q(x))$ $\exists x \,:\, (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

(ii) $\exists x \,:\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ $\forall x \,\neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$ ή ισοδυναμα $\forall x \left(P(x) \wedge \neg Q(x)\right)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \,:\, (x \geq y)$ $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \,:\, (x < y)$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} \,:\, (x + y \geq z)$ $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \,:\, (x + y < z)$

Άσκηση 4. Διατυπώστε με λόγια τις παρακάτω προτάσεις και βρείτε ποιές είναι αληθείς.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$

Για κάθε πραγματικό x υπάρχει πραγματικός y τέτοιος ώστε $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$. A

Η πρόταση λέει ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ με μεταβλητή το y, έχει λύση. Οντως, αν υπολογίσουμε τη διακρίνουσα, θα είναι $\Delta = (-3x)^2 - 4(2x^2) = x^2 \geq 0$, επομένως υπάρχει λύση.

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$

Υπάρχει πραγματικός y τέτοιος ώστε για κάθε πραγματικό x να ισχύει $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$. Ψ

Η πρόταση λέει ότι όποια τιμή και να βάλουμε στο x, λύνοντας ως προς y θα βρούμε την ίδια λύση. Προφανως αυτό δεν είναι αληθές.
Πάρετε για παράδειγμα $x = 0$. Τότε το $y = 0$. Αν όμως πάρετε $x = 1$ τότε η εξίσωση $1 - 3y + 2y^2 = 0$ έχει λύση $y = 1$ ή $y = 1/2$.

(iii) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \epsilon \in \mathbb{R} : \Big(\big((\varepsilon > 0) \wedge (n > N)\big) \Rightarrow (\frac{1}{n} < \varepsilon) \Big).$

Υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό ε, αν $\varepsilon > 0$ και $n > N$ τότε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ψ

Αν υπήρχε τέτοιο N τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$, θα έπρεπε να ισχύει $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{2N+1}$. Ισοδύναμα, θα έπρεπε να ισχύει ότι: αν $n > N$ τότε $2N + 1 < n$. Το τελευταίο όμως δεν είναι πάντα αληθές, διότι αν πάρουμε $n = N + 1$ τότε $N + 1 > N$ όμως δεν ισχυει ότι $2N + 1 < N + 1$.

(iv) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ :\ x + z = y.$

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών x, y υπάρχει φυσικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x + z = y$ Ψ
π.χ. για $y = 2$ και $x = 4$, το $z = 2 - 4 \notin \mathbb{N}$

(v) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \exists z \in \mathbb{Z}\ :\ x + z = y.$

Για κάθε ζεύγος ακεραίων αριθμών x, y υπάρχει ακεραιος αριθμός z τέτοιος ώστε $x + z = y$ A

Άσκηση 5. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες, οπως στα ήδη συμπληρωμένα παραδείγματα. Για την τρίτη στήλη του πίνακα Α να βρείτε αν η πρόταση $P(x, y)$ αληθεύει ή οχι.

Πίνακας Α	$P(x,y)$: ο x θαυμάζει τον y	$P(x,y) : x \leq y$ για $x, y \in \mathbb{R}$
$\forall x \exists y P(x,y)$	όλοι θαυμάζουν κάποιον	κάθε πραγματικός παριθμός έχει κάποιον μεγαλύτερο ή ίσο του A
$\forall x \exists y P(y,x)$	όλοι θαυμάζονται από κάποιον	κάθε πραγματικόςαριθμος έχει κάποιον μικρότερο ή ίσο του A
$\forall x \forall y P(x,y)$	όλοι θαυμάζουν όλους	για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών ο πρώτος είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου Ψ
$\exists x \forall y P(x,y)$	υπάρχει κάποιος που θαυμάζει τους πάντες	υπάρχει πραγματικός αριθμός μικρότερος ή ίσος από όλους τους πραγματικους Ψ
$\exists x \forall y P(y,x)$	υπάρχει κάποιος που τον θαυμάζουν όλοι	υπάρχει πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από όλους τους πραγματικους Ψ
$\exists x \exists y (P(y,x) \wedge P(x,y))$	ο x και ο y αλληλοθαυμάζονται	υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x \leq y$ και $y \leq x$ A

Πίνακας Β	$P(x,y)$: ο x θαυμάζει τον y
$\exists x(\forall y \neg P(x,y))$	υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν
$\exists x\big(P(x,x) \wedge \forall y\big(P(x,y) \Rightarrow x=y\big)\big)$	υπάρχει κάποιος που θαυμάζει μόνο τον εαυτό του
$\forall x \exists y\big(\neg(x=y) \wedge P(y,x)\big)$	όλοι θαυμάζονται από κάποιον εκτος του εαυτου τους
$\exists x \forall y\big(\neg(x=y) \Rightarrow P(x,y)\big)$	υπάρχει κάποιος που θαυμάζει όλους τους άλλους
$\exists x \forall y\big(\neg P(x,y)\big)$	υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν
$\neg \exists x \forall y\big(\neg(x=y) \Rightarrow P(y,x)\big)$	δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος που τον θαυμάζουν όλοι οι άλλοι
$\forall x \exists y\big(\neg(x=y) \wedge \neg P(y,x)\big)$	για κάθε άνθρωπο υπάρχει κάποιος άλλος που δεν τον θαυμάζει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 1. Αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο τις παρακάτω προτάσεις. Δηλαδη, υποθέστε ότι ισχύει η άρνηση των προτάσεων και καταλήξτε σε αντίφαση.

(i) Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $ab = c$ δείξτε ότι $a \leq \sqrt{c}$ ή $b \leq \sqrt{c}$.

(ii) Αν mn είναι περιττός ακέραιος τότε και οι δύο m, n είναι περιττοί.

(iii) Το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος.

(iv) Αν $y, x \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $y \leq x$.

(v) Δεν υπάρχει μέγιστος ακέραιος.

(i) Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν a, b, c θετικοί πραγματικοί τ.ω. $ab = c$ και $a > \sqrt{c}$ και $b > \sqrt{c}$

Εφόσον οι ανισότητες είναι θετικές, μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατα μέλη και τότε παίρνουμε $ab > \sqrt{c}\sqrt{c}$, άτοπο

(ii) Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν m, n τ.ω. mn περιττος ακέραιος και m όχι περιττός ή n όχι περιττός. Ισοδ. υποθέτουμε ότι υπάρχουν m, n τ.ω. mn περιττος ακέραιος και m αρτιος ή n αρτιος.

Τότε $mn = m \cdot (2k)$ ή $mn = (2k)n$, δηλαδή mn είναι άρτιος. Ατοπο!

(iii) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ρητός και άρρητος με αθροισμα ρητό

Δηλαδή $\rho + \alpha = \rho'$ ή $\alpha = \rho' - \rho$ ή $\alpha = \frac{m'}{n'} + \frac{m}{n} = \frac{m'n + n'm}{n \cdot n'}$ το οποίο είναι ρητή μορφή. Ατοπο!

(iv) Εστω ότι δεν ισχύει η πρόταση. Τοτε, ($y, x \in \mathbb{R}$ και $y \leq x + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$) και $y > x$.

Παίρνουμε $\epsilon = \frac{y-x}{2}$. Με βάση την υπόθεσή μας θα ισχύει $y \leq x + \frac{y-x}{2}$. Δηλαδή $\frac{y-x}{2} \leq 0$ ή $y \leq x$. Άτοπο!

(v) Εστω ότι υπάρχει μέχιστος ακέραιος M. Τότε $a \leq M$ για κάθε $a \in \mathcal{Z}$

Παίρνουμε $a = 2|M|$ και τότε $2|M| < M$. Άτοπο!

Άσκηση 2. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε τις παρακάτω ισότητες ή ανισότητες:

(i) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

(iii) $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$

(iv) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$ για κάθε $n>1$

(v) $n!<n^n$ για κάθε $n>1$

(vi) $\sqrt{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$ για $n\geq 2$.

(vii) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ ρίζες}}=2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$

Υπόδείξεις:
Στο (iv) μήπως είναι ευκολότερο να αποδείξετε την ανισότητα $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq\frac{3}{4}-\frac{1}{n}$;
Αν αποδείξετε αυτήν την ανισότητα, έχετε δειξει το ζήτούμενο;
Στο (vi) Αποδείξτε και χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
Στο (viii) χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα $2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$.

(ii) βάση της επαγωγής: $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

(iii) βάση της επαγωγής: $2=2^1\cdot 1$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$(n+2)\cdots(2n-1)(2n)(2n+1)(2n+2)=\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n+1}(2n+1)2(n+1)=2^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)$

(iv) βάση της επαγωγής: για $n=2$ $\frac{1}{2^2}\leq\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{3}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\overset{??}{\leq}\frac{3}{4}-\frac{1}{n+1}$$

ισχύει, διότι
$-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^2}\leq\frac{n+1-n}{n(n+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)}\leq\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\leq n+1$ ✔

(v) βάση της επαγωγής: $2!<2^2$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$(n+1)!=n!(n+1)<n^n(n+1)<(n+1)^n(n+1)=(n+1)^{n+1}$

(vi) βάση της επαγωγής: $\sqrt{2}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. ότι $\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(vii) βάση της επαγωγής: για $n=1$: $\sqrt{2} = 2\cos(\frac{\pi}{4})$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n+1 \text{ ρίζες}} = \sqrt{2+2\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+1}})} = \sqrt{2+2\cos(2\tfrac{\pi}{2^{n+2}})} = \sqrt{4\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+2}})^2} = 2\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+2}})$$

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε ότι:

(i) $3 \mid (n^3 - 10n + 9)$ για κάθε $n \geq 1$

(Εδώ υπάρχει και άλλη απόδειξη χωρίς επαγωγή, μπορείτε να την δείτε;)

(ii) $5|7^n - 2^n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $7|4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ για κάθε $n \geq 0$.

(iv) $a - b \mid (a^n - b^n)$, όπου a, b είναι ακέραιοι και $n \geq 1$.

(i) βάση της επαγωγής: $3|(1^3 - 10 + 9)$ δηλ. $3|0$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 10(n+1) + 9 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 10n - 10 + 9 \\ &= \underbrace{n^3 - 10n + 9}_{\text{πολ/σιο του 3}} + \underbrace{3n^2 + 3n - 9}_{\text{πολ/σιο του 3}}\end{aligned}$$

αλλη απόδειξη: $n^3 - 10n + 9 = n^3 - n - 9n + 9 = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\text{πολ/σιο του 3}} - 9n + 9$

(ii) βάση της επαγωγής: $5|(7-2)$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot 7^n + 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n = 5 \cdot 7^n + 2\underbrace{(7^n - 2^n)}_{\text{πολ/σιο του 5}}$$

(iii) βάση της επαγωγής: $7|(4+3)$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$4^{2(n+1)+1}+3^{2(n+1)+1} = 4^{2n+3}+3^{2n+3} = 4^2\cdot 4^{2n+1}+3^2\cdot 3^{2n+1} = 16\cdot 4^{2n+1}+9\cdot 3^{2n+1} = 7\cdot 4^{2n+1}+9\underbrace{(4^{2n+1}+3^{2n+1})}_{\text{πολ/σιο του 7}}$

(iv) βάση της επαγωγής: $a-b|(a-b)$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$a^{n+1}-b^{n+1} = a\cdot a^n - b\cdot b^n = (a-b)\cdot a^n + b\cdot a^n - b\cdot b^n = (a-b)\cdot a^n + b\cdot\underbrace{(a^n-b^n)}_{\text{πολ/σιο του } a-b}$$

Άσκηση 4.

(i) Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως $a_1=a_2=1$ και $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ για κάθε $n\geq 2$. Δείξτε ότι:

(a) ο ορος a_{3n} είναι άρτιος για κάθε $n\geq 1$

(b) ο ορος a_{5n} είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n\geq 1$

(ii) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1=1, a_2=3$ και $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ για $n\geq 3$,

δείξτε ότι $a_n<(7/4)^n$.

(iii) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1=1, a_2=1$ και $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ για $n\geq 3$,

δείξτε ότι $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, όπου $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(iv) Αν μία ακολουθία (a_n) ικανοποιεί την ισότητα $a_{n+1}=2a_n+1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε

επίσης ικανοποιεί την ισότητα $a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(v) Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά ως $a_1=1$ και $a_n=2\cdot a_{[\frac{n}{2}]}$,

δείξτε ότι $a_n\leq n$ για κάθε $n\geq 1$. (Με $[x]$ συμβολίζουμε το ακεραιο μέρος του $x\in\mathbb{R}$.)

(ib) βάση της επαγωγής: για $n=1$ εχουμε $a_5=a_4+a_3=a_3+a_2+a_2+a_1=a_2+a_1+3=5$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$\begin{aligned} a_{5(n+1)} = a_{5n+5} &= a_{5n+4}+a_{5n+3} = (a_{5n+3}+a_{5n+2})+(a_{5n+2}+a_{5n+1}) \\ &= a_{5n+3}+2a_{5n+2}+a_{5n+1} = 3a_{5n+2}+2a_{5n+1} \\ &= 3a_{5n+1}+3a_{5n}+2a_{5n+1} = 5a_{5n+1}+3a_{5n} \end{aligned}$$

(ii) βάση της επαγωγής: για $n=1$ εχουμε $a_1<\frac{7}{4}$ και για $n=2$ έχουμε $a_2<\frac{49}{16}$

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\leq\left(\tfrac{7}{4}\right)^n+\left(\tfrac{7}{4}\right)^{n-1}=\left(\tfrac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\tfrac{7}{4}+1\right)=\left(\tfrac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\tfrac{11}{4}\leq\left(\tfrac{7}{4}\right)^{n-1}\cdot\tfrac{49}{16}=\left(\tfrac{7}{4}\right)^{n+1}$$

(iii) βάση της επαγωγής: για $n=2$ εχουμε $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\dfrac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}}=1=a_2$

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha+1) - \beta^{n-1}(\beta+1)}{\alpha - \beta} = (*)$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ και $\alpha^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \alpha + 1$

Ομοίως $\beta + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}$ και $\beta^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{-2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{-\sqrt{5}+3}{2} = \beta + 1$

Αρα $(*) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

(iv) βάση της επαγωγής: για $n = 1$ η ισότητα $a_1 + 1 = 2^{1-1}(a_1 + 1)$ ισχύει

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. υποθέτω ότι $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι $a_{n+1} + 1 = 2^n(a_1 + 1)$

$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2\Big(2^{n-1}(a_1+1) - 1\Big) + 1 = 2^n(a_1+1) - 2 + 1$ δηλ. $a_{n+1} + 1 = 2^n(a_1 + 1)$

(v) βάση της επαγωγής: για $n = 1$ εχουμε $a_1 = 1 \leq 1$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτω ότι ισχύει για n, δηλ. ότι $a_n \leq n$

επαγωγικό βήμα: δείχνω ότι ισχύει για $n+1$, δηλ. ότι $a_{n+1} \leq n+1$

αν $n+1$ αρτιος: εστω $n+1 = 2k$. Τότε $a_{n+1} = a_{2k} = 2 \cdot a_k \leq 2 \cdot k = n+1$

αν $n+1$ περιττός: εστω $n+1 = 2k+1$. Τότε $a_{n+1} = a_{2k+1} = 2 \cdot a_k \leq 2 \cdot k \leq 2k+1 = n+1$

Άσκηση 5. Έχουμε (απεριόριστα) νομίσματα αξίας 3 και αξίας 5. Δείξτε με επαγωγή ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιδήποτε ακέραιο ποσό αξίας $n \geq 8$ χρησιμοποιώντας τα παραπάνω νομίσματα.

βάση της επαγωγής: για $n = 8$ έχουμε $8 = 3 + 5$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε $n = a \cdot 3 + b \cdot 5$

επαγωγικό βήμα: θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a', b' \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε $n+1 = a' \cdot 3 + b' \cdot 5$

Απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $n+1 = a \cdot 3 + b \cdot 5 + 1$ για κάποια $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

1η περίπτωση: $b = 0$
Τότε $n+1 = a \cdot 3 + 1$ και εφόσον $n+1 \geq 8$, θα είναι $a \geq 3$.
Αρα, μπορούμε να γράψουμε $n+1 = (a-3) \cdot 3 + 9 + 1 = (a-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5$ ✔

2η περίπτωση: $b \neq 0$
Αρα $b \geq 1$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε
$n+1 = a \cdot 3 + (b-1) \cdot 5 + 5 + 1 = (a+2) \cdot 3 + (b-1) \cdot 5$ ✔

Άσκηση 6. Δείξτε ότι οποιοσδήποτε ακέραιος που αποτελείται από 3^n ίδια ψηφία διαιρείται από το 3^n.

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ ✔

Οποιοσδήποτε ακέραιος που αποτελείται από 3 ίδια ψηφία διαιρείται από το 3 [1].

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: Εστω A ένας ακέραιος που αποτελείται από 3^{n+1} ιδια ψηφία. Δηλ.

$$\begin{aligned}
A &= \underbrace{\text{aaa.aaa.aaa.}\cdots\text{.aaa.aaa}}_{3^{n+1}\text{ φορές a}} = \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}}.\underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}}.\underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}} \\
&= \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}} + \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}}.\underbrace{\text{000.}\cdots\text{.000}}_{3^n\text{ φορες 0}} + \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}}.\underbrace{\text{000.}\cdots\text{.000}}_{3^n\text{ φορες 0}}.\underbrace{\text{000.}\cdots\text{.000}}_{3^n\text{ φορες 0}} \\
&= \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}} \times (1 + 10^{3^n} + 10^{2\cdot 3^n}) \\
&= \underbrace{\text{aaa.}\cdots\text{.aaa}}_{3^n\text{ φορες a}} \times (1.000.\cdots.000.001.000.\cdots 000.001) = (3^n \cdot k) \times (3 \cdot \ell)
\end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n .$$

βάση της επαγωγής: για $n = 1$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^1 \leq \frac{a^1+b^1}{2}$ ✔

επαγωγική υπόθεση: υποθέτουμε ότι ισχύει για n

επαγωγικό βήμα: δείχνουμε ότι ισχύει για $n + 1$

$$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^{n+1} = \tfrac{a+b}{2} \cdot \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \tfrac{a+b}{2} \cdot \tfrac{a^n+b^n}{2} = \tfrac{a^{n+1}+a\cdot b^n+b\cdot a^n+b^{n+1}}{4} \overset{?}{\leq} \tfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$$

Δείχνουμε ότι αν $a + b > 0$ τότε $a \cdot b^n + b \cdot a^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$ ή ισοδύναμα ότι $(a - b)(b^n - a^n) \leq 0$

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $a < b$

αν $0 < a < b$ τότε $a^n < b^n$ και συνεπώς $(a - b)(b^n - a^n) \leq 0$

αν $a < 0 < b$ τότε εφόσον $a+b > 0$ θα ειναι $|a| < b$. Τότε $b^n - a^n = \begin{cases} b^n - |a|^n > 0 \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ b^n + |a|^n > 0 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

Άσκηση 8. Για $n \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε αναδρομικά το $n!$ (*n παραγοντικό*) ως $0! = 1$ και $(n + 1)! = n!(n + 1)$. Επομένως, πρακτικά, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n - 1) \cdot n$.

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι το $(n - k)!k!$ διαιρεί το $n!$, για όλα τα k με $0 \leq k \leq n$.

[1] κριτήριο διαιρετότητας του 3: Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3

(ii) Απο το προηγούμενο ερώτημα, παρατηρήστε ότι ο $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ είναι φυσικός αριθμός που θα τον συμβολίζουμε ως $\binom{n}{k}$ (*διωνυμικός συντελεστής*). Δηλαδη, $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Δείξτε οτι $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ και $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) Δείξτε ότι $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

(iv) Δείξτε με επαγωγή οτι οι διωνυμικοί συντελεστές είναι ακριβώς οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

(i) Δείχνουμε ότι $\frac{n!}{(n-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα k με $0 \le k \le n$.

<u>βάση της επαγωγής:</u> για $n = 1$

οταν $k = 0$ έχουμε $\frac{1!}{(1-0)!0!} = 1 \in \mathbb{N}$ ✔ οταν $k = 1$ έχουμε $\frac{1!}{(1-1)!1!} = 1 \in \mathbb{N}$ ✔

<u>επαγωγική υπόθεση:</u> υποθέτουμε ότι $\frac{n!}{(n-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα $0 \le k \le n$

<u>επαγωγικό βήμα:</u> δείχνουμε ότι $\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \in \mathbb{N}$ για όλα τα $0 \le k \le n+1$

για $k = 0$ ισχύει διότι $\frac{(n+1)!}{(n+1-0)!0!} = 1 \in \mathbb{N}$

για $k > 0$ εχουμε:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1-k)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n+1-k)!k!} = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!}}_{\in\mathbb{N}}$$

(ii) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 1} = n$

$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

(iii)

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{k}{n+1-k}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k} + \frac{k}{n+1-k}\cdot\frac{n!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!} = \binom{n}{k} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

(iv) <u>βάση της επαγωγής:</u> για $n = 1$ $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b$ ✔

<u>επαγωγική υπόθεση:</u> υποθέτουμε ότι ισχύει για n

<u>επαγωγικό βήμα:</u>

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right) \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n \\
&\qquad + \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \cdots\cdots\cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{aligned}
$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 1. Υπολογίστε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης των:

1. 53 δια 7, -53 δια 7, -53 δια -7, -53 δια -7.
2. 92 δια 4, -92 δια 4, -92 δια -4, -92 δια -4.

Άσκηση 2. Έστω p πρώτος αριθμός και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε με επαγωγή στο n, ότι αν $p \mid a_1 \cdots a_n$ τότε $p \mid a_i$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 3. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Εάν $a \mid b$, δείξτε ότι $(a, b) = |a|$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι αν $m, n, s \in \mathbb{N}$ και $m \mid s$, $n \mid s$ και $(m, n) = 1$,τότε $mn \mid s$.

Άσκηση 5. Έστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Εάν $(n, m) = 1$, αποδείξτε ότι $(m + n, mn) = 1$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(3n + 1, 10n + 3) = 1$.

Άσκηση 7. Με χρήση του Ευκλείδιου αλγόριθμου:

1. Βρείτε όλους τους κοινούς διαιρέτες των 252 και 180.
2. Βρείτε $s, t \in \mathbb{Z}$ τέτοιους ώστε $252s + 180t = (252, 180)$.

Άσκηση 8. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Εάν $(a, b) = 1$ και το γινόμενο ab είναι τετράγωνο ακεραίου, δείξτε ότι οι a, b είναι επίσης τεράγωνα ακεραίων.

Άσκηση 9. Αν $(a, b) = 1$ ποιές είναι οι δυνατές τιμές για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη

1. $(a + b, a - b)$,
2. $(a^2 + b^2, a + b)$.

Άσκηση 10. Έστω πρώτος αριθμός p και φυσικοί αριθμοί q, n. Εάν $p \mid q^n$ δείξτε ότι $p^n \mid q^n$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Οι τρείς πρώτες ασκήσεις αφορούν την προηγούμενη ενότητα του μαθήματος. Ολες οι επομενες αφορουν το εισαγωγικό κεφάλαιο της συνδυαστικής (βιντεο 29/4) .

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[n]$ για το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο φυσικών αριθμών είναι μοναδικό.

Άσκηση 2. Σε αυτή την άσκηση θα δούμε μία διαφορετική απόδειξη της σχέσης εκπ$(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

(i) Δείξτε ότι ο $d = \frac{ab}{(a,b)}$ είναι φυσικός αριθμός.

(ii) Δείξτε ότι εκπ$(a, b) \mid d$. Υπόδειξη: το d είναι κοινό πολλαπλάσιο των a, b.

(iii) Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι $ab = \lambda \cdot$ εκπ$(a, b) \cdot (a, b)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το $\lambda \cdot (a, b)$ είναι κοινός διαιρέτης των a, b. Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $\lambda \cdot (a, b) \mid (a, b)$.

(iv) Δείξτε ότι εκπ$(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω ελάχιστα κοινά πολλαπλάσια:

(i) εκπ$(2^3 \cdot 5 \cdot 11^2, 2 \cdot 3^7 \cdot 17^3)$,

(ii) εκπ$(1587, 437)$,

(iii) εκπ$(n^6 - 1, n^4 - 1)$, με $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Άσκηση 4.

(i) Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 5.

(ii) Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με$1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4.

(iii) Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4 και με το 5.

(iv) Υπολογίστε το πλήθος των ακεραίων k με $1234 \leq k \leq 4321$ οι οποίοι διαιρούνται με το 4 ή με το 5.

Άσκηση 5.

(i) Πόσα υποσύνολα του συνόλου $[10]$ περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό;

(ii) Πόσα υποσύνολα του συνόλου $[10]$ περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο και τουλαχιστον εναν περιττό αριθμό;

(iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του $[10]$ τέτοιο ώστε $2 \in A$;

(iv) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του $[10]$ τέτοιο ώστε $2 \in A$ και $4 \in A$;

(v) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του $[10]$ τέτοιο ώστε $2 \in A$ ή $4 \in A$;

(vi) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ενα υποσύνολο A του $[10]$ τέτοιο ώστε $2 \in A$ ή $4 \in A$ ή $6 \in A$;

Υπόδειξη: (i) Πόσα υποσύνολα δεν περιέχουν αρτιο αριθμό;
(ii), (v), (vi) Εφαρμόστε αρχή εκλεισμού αποκλεισμού.

Άσκηση 6.

(i) Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν κάποιο 2 στο ανάπτυγμά τους;

(ii) Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ δεν έχουν ούτε 2 ούτε 3 στο ανάπτυγμά τους;

(iii) Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν κάποιο 2 ή 3 στο ανάπτυγμά τους;

(iv) Πόσοι μή αρνητικοί αριθμοί $< 10^6$ έχουν και 2 και 3 στο ανάπτυγμά τους?

Υπόδειξη: (i) Πόσοι δεν έχουν?
(iii) Εφαρμόστε αρχή εκλεισμού αποκλεισμού.

Άσκηση 7. Μία δυαδική συμβολοσειρά μήκους n είναι μία ακολουθία $(a_1, \ldots, a_n)$ τέτοια ώστε $a_i = 0$ ή 1.

(i) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 υπάρχουν?

(ii) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με $0,\ 0,\ 0$

(iii) Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με $0,\ 0,\ 0$ ή τελειώνουν με $1,\ 1$?

Άσκηση 8. Πόσους διαιρέτες έχει ο φυσικός αριθμός $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, όπου $p_1, \ldots, p_k$ πρώτοι αριθμοί και $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$?

Άσκηση 9.

(i) Αν p, q πρώτοι και $n = pq$, να βρείτε το πλήθος των ακεραίων $0 < k \leq n$ οι οποίοι είναι πρώτοι προς το n.

(ii) Αν p, q, r πρώτοι και $n = pqr$, να βρείτε το πλήθος των ακεραίων $0 < k \leq n$ οι οποίοι είναι πρώτοι προς το n.

Άσκηση 10. Ενας άνθρωπος έχει 10 φίλους. Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο με τουλάχιστον δύο από αυτούς;

Υπόδειξη: Σκεφτείτε το πρόβλημα με σύνολα και υποσύνολα.

Άσκηση 11.

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$.

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \neq \emptyset$.

(iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ έτσι ωστε $A \cap B = \emptyset$ και $A, B \neq \emptyset$.

Υπόδειξη: Κάνετε κάτι ανάλογο όπως την συνάρτηση f της διαφάνειας σελ. 11.

Π.χ. για το (i) οριστε μία συνάρτηση $f : \{(A, B) : A, B \subseteq [n]\} \longrightarrow \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2\}$

με $f(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad ?? \\ 1 & \text{αν} \quad ??. \\ 2 & \text{αν} \quad ?? \end{cases}$ Ποιές θα είναι οι τρείς περιπτώσεις;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδια Ασκήσεων 10 και 11

Άσκηση 1.

(i) Αν $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, να βρείτε το πλήθος των αρτίων συναρτήσεων $f : A \to A$.

(ii) Αν $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, να βρείτε το πλήθος των περιττών συναρτήσεων $f : A \to A$.

(iii) Να βρείτε το πλήθος των αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων $f : [n] \to [n]$.

(iv) Να βρείτε το πλήθος των αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων $f : [n] \to [m]$, όπου $m \geq n$.

(Αρτιές συναρτήσεις: $f(x) = f(-x)$ και περιττες συναρτήσεις: $f(x) = -f(-x)$)

Άσκηση 2. Εχουμε 14 διαφορετικά βιβλία εκ των οποίων 5 είναι ελληνικά, 3 γαλλικά και 6 γερμανικά.

(i) Με πόσους τρόπους μπορόυμε να τα τοποθετήσουμε στη σειρά;

(ii) Με πόσους τρόπους μπορόυμε να τα τοποθετήσουμε στη σειρα ωστε να είναι τα βιβλία της ίδιας γλώσσας μαζί;

Άσκηση 3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 βιβλία σε 5 διακεκριμένα ράφια:

(i) αν τα βιβλία είναι πανομοιότυπα;

(ii) αν τα βιβλία είναι διαφορετικά, έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους στο ράφι και κάθε ράφι έχει 4 βιβλία;

(iii) αν τα βιβλία είναι διαφορετικά και έχει σημασία η σειρά τοποθέτησής τους στο ράφι;

Άσκηση 4. Σε ένα ανελκυστήρα μπαίνουν 8 άτομα στο ισογειο ενός κτιρίου. Ο ανελκυστήρας ανεβαινει και σταματάει στον 6^o όροφο. Με πόσους τρόπους μπορεί να έχουν κατέβει τα 8 άτομα:

(i) αν όλοι θεωρούνται πανομοιότυποι;

(ii) αν έχουμε 5 γυναίκες και 3 αντρες;

Άσκηση 5. Έχουμε 200 όμοιες μεγαλες βαλίτσες, 100 όμοιες μικρές βαλίτσες και θέλουμε να τις μεταφέρουμε από το Ηράκλειο στην Αθήνα. Έχουμε στη διάθεσή μας 6 διαφορετικές πτήσεις.

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταφέρουμε τις βαλίτσες αν δεν έχουμε περιορισμό στην χωρητικότητα των αεροπλάνων;

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταφέρουμε τις βαλίτσες αν δεν έχουμε περιορισμό στην χωρητικότητα των αεροπλάνων και θέλουμε κάθε αεροπλάνο να πάρει τουλάχιστον 10 μεγάλες και τουλάχιστον 5 μικρές βαλίτσες;

Άσκηση 6. Έστω ότι θέλουμε να συστήσουμε πενταμελές συμβούλιο από σύνολο 20 ατόμων. Στο συμβούλιο θα εκλεγούν πέντε μέλη εκ των οποίων ένα θα είναι πρόεδρος και ένα αντιπρόεδρος. Τα άλλα τρία (απλά) μέλη θεωρούνται ισότιμα μεταξύ τους. Να υπολογιστούν οι τρόποι να επιλέξουμε ενα τέτοιο συμβούλιο στις εξής περιπτώσεις:

(i) δίχως περιορισμό

(ii) αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής A ως προεδρος

(iii) αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής A (είτε ως πρόεδρος είτε ως απλό μέλος)

(iv) αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής A ως πρόεδρος, ή η φοιτήτρια B ως αντιπρόεδρος (ή και οι δύο, με αυτές τις δύο ιδιότητες).

Άσκηση 7.

(i) Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ περιέχουν ακριβώς k περιττούς ακεραίους;

(ii) Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ περιέχουν το πολύ k περιττούς ακεραίους;

Άσκηση 8.

(i) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης Π Α Ρ Α Λ Λ Η Λ Ο Σ;

(ii) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π;

(iii) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς περιεχουν τα γραμματα ΗΛ διαδοχικα;

(iv) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς περιεχουν τα γραμματα Η,Λ σε διπλανες θέσεις;

(v) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π **και** περιεχουν τα γραμματα ΗΛ διαδοχικα;

(vi) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π **ή** περιεχουν τα γραμματα ΗΛ διαδοχικα;

Άσκηση 9. Θέλουμε να μοιράσουμε 10 πορτοκάλια και 8 μήλα σε 4 παιδιά. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε:

(i) αν δεν έχουμε κανένα περιορισμό;

(ii) αν κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα πορτοκάλι;

Άσκηση 10.

(i) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$;

(ii) Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;

(iii) Πόσοι από αυτούς είναι μικρότεροι ή ίσοι του 30000;

Άσκηση 11. Στις παρακατω ερωτήσεις όλα τα άτομα θεωρούνται διακριτά.

(i) Με πόσους τρόπους μπορούν 3 αγόρια και 3 κορίτσια να καθίσουν στην σειρά;

(ii) Σε πόσους από αυτούς κάθονται αγορια κορίτσια εναλλάξ;

(iii) Σε πόσους από αυτούς όλα τα κορίτσια κάθονται σε διαδοχικές θεσεις;

(iv) Σε πόσους από αυτούς μόνο τα αγόρια κάθονται σε διαδοχικες θέσεις;

Άσκηση 12.

(i) 10 άτομα συναντιούνται και ανταλλάσσουν χειραψίες. Πόσες χειραψίες γίνονται;

(ii) 10 άτομα συναντιούνται και ανταλλάσσουν χειραψίες, εκτός των Α και Β που έχουν μαλώσει. Πόσες χειραψίες γίνονται;

Άσκηση 13.

(i) 6 ορειβάτες χωρίζονται σε 3 ομάδες για να φτάσουν στην κορυφή του κοντινού βουνού. Αν οι ομάδες θέλουμε να αποτελούνται από 3, 2 και 1 άτομα αντίστοιχα, με πόσους τρόπους μπορούν να φτιάξουν αυτές τις 3 ομάδες;

(ii) Αν χωρίζονταν σε 2 ομάδες των 3 ατόμων με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μοιραστούν;

Άσκηση 14.

(i) Εάν έχετε 2 κέρματα του ενός ευρώ, 2 εικοσάλεπτα και 3 πεντάλεπτα, πόσα διαφορετικά ποσά μπορείτε να πληρώσετε, χωρίς να χρειαστείτε ρέστα;

(ii) Εάν έχετε 2 κέρματα των 2 ευρώ, 2 κέρματα του 1 ευρω και και 3 κέρματα των 50 λεπτών, η απάντηση θα ήταν ίδια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 15.

(i) Με πόσους τρόπους μπορείτε να διαλέξετε 4 παπούτσια από 5 διαφορετικά ζευγάρια;

(ii) Σε πόσους από αυτούς έχετε τουλάχιστον ένα ζευγάρι;

(iii) Σε πόσους από αυτούς έχετε (ακριβώς) δύο ζευγάρια;

Άσκηση 16.

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 διαφορετικά βιβλία σε 5 φοιτητές ώστε ο καθένας να πάρει από 2;

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 διαφορετικά βιβλία σε 4 φοιτητές ώστε ο καθένας να πάρει 2 (αρα θα περισσέψουν δύο βιβλία);

Άσκηση 17.

(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$ ώστε ανάμεσα στο 1 και στο 2 να υπάρχουν ακριβώς 3 ψηφία;

(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$ ώστε το 1 να είναι πριν το 2 και το 2 πριν το 3;

Άσκηση 18. Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 15 ερωτήσεις τύπου Σωστό/Λάθος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να απαντήσει το διαγώνισμα ένας φοιτητής:

(i) αν έχει τη επιλογή να αφήσει κενές κάποιες απαντήσεις;

(ii) αν δεν έχει τη επιλογή να μήν απαντήσει κάποιες από τις ερωτήσεις;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Ελένη Τζανάκη
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 12

Άσκηση 1.

(i) Να αποδείξετε ότι $|(-1,1)| = |\mathbb{R}|$

(ii) Να αποδείξετε ότι $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

(iii) Να αποδείξετε ότι $|[0,1]| = |(0,1)|$

(iv) Να αποδείξετε ότι $|(-1,0) \cup (0,1)| = |\mathbb{R}|$

Άσκηση 2. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Q}\}$

(ii) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ είναι πρώτος}\}$

(iii) $\{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10^{-10000}\}$

(v) $\mathbb{C}$

(vi) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2^a 3^b, \text{ για κάποια } a,b \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 3.

(i) Αποδείξτε οτι κάθε σύνολο διαστημάτων με ρητά άκρα στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.

Προσέξετε ότι η άσκηση ζητάει να μετρήσετε το πλήθος των διαστημάτων και όχι το πλήθος των στοιχείων των διαστημάτων.

Άσκηση4. Θεωρήστε το σύνολο S των σφαιρών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ των οποίων τα κέντρα έχουν ρητές συντεταγμένες και των οποίων η ακτίνα είναι ρητός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο S είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 5.

(i) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο αριθμήσιμο σύνολο; (Οι λέξεις δεν είναι κατ' ανάγκη υπαρκτές.)

(ii) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε από ένα αριθμήσιμο-άπειρο αλφάβητο (π.χ. $\mathbb{N}$) αριθμήσιμο σύνολο;