ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2019-20
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Πρόβλημα 1. Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, p =πρώτος και έστω ότι ο βαθμός τής επέκτασης $K \leq L$ είναι πρώτος προς τόν p. Δείξτε ότι η επέκταση είναι διαχωρίσιμη.

Πρόβλημα 2. Έστω E τό σώμα ριζών τού $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Εφαρμόζοντας τόν αλγόριθμο τής απόδειξης τού θεωρήματος τού πρωταρχικού στοιχείου, βρείτε έναν μιγαδικό c με $E = \mathbb{Q}(c)$.

Πρόβλημα 3. **α)** Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = 2$. Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.
β) Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πολυώνυμο περιττού βαθμού ≥ 3 τό οποίο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $a \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$ δεν είναι κανονική.

Πρόβλημα 4. Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
α) Τό $\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.
β) Τό $\mathbb{Q}(a + ia)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}(ia^2)$.
γ) Τό $\mathbb{Q}(a + ia)$ δεν είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 5. **α)** Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τού F_{2^n} είναι τό τετράγωνο κάποιου στοιχείου του.
β) Δείξτε ότι $F_{2^2} = \mathbb{Z}_2(a)$, όπου τό $a \in F_{2^2}$ είναι βαθμού 2 πάνω από τό $\mathbb{Z}_2$

Πρόβλημα 6. Είδαμε στο μάθημα ότι η επέκταση $\mathbb{Z}_p \leq F_{p^n}$ είναι Galois, ως τό σώμα ριζών τού διαχωρίσιμου πολυωνύμου $f(x) = x^{p^n} - x$. Επομένως αν $a \in F_{p^n}$, τό $q(x) = \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Z}_p)$, αναλύεται πάνω από τό F_{p^n} (διότι όλες οι ρίζες του είναι στο F_{p^n}). Βρείτε την ανάλυση τού $q(x)$ ως έκφραση δυνάμεων τού a. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι $q(a) = 0$ συνεπάγεται ότι $q(a^p) = 0$).

Πρόβλημα 7. **α)** Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_{p^n}$ στο οποίο τό $f(x)$ αναλύεται.
β) Αν, επιπλέον, τό $f(x)$ έχει διαφορετικές ρίζες δείξτε ότι $f(x) \mid x^{p^n} - x$.

Πρόβλημα 8. Έστω $K = \mathbb{Z}_p(x, y)$ τό σώμα των ρητών συναρτήσεων μεταβλητών x, y με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{Z}_p$ (p=πρώτος). Έστω $g(t) = t^p - x$, $h(t) = t^p - y \in K[t]$ και ορίζουμε ως E τό σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $f(t) = g(t)\, h(t) \in K[t]$. Δείξτε ότι:
α) Τά $g(t)$ και $h(t)$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα τού $K[t]$.
β) $[E : K] = p^2$.
γ) Η επέκταση $K \leq E$ δεν είναι διαχωρίσιμη.
δ) $a^p \in K$ για κάθε $a \in E$.

Πρόβλημα 9. Έστω p περιττός πρώτος και $F = F_{p^n}$ τό πεπερασμένο σώμα με p^n στοιχεία.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $F^2 = \{a^2,\, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία. Συμπεράνατε ότι, αν

$t \in F$ τότε και τό σύνολο $t - F^2 = \{t - a^2,\, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία.
β) Για $t \in F$ δείξτε ότι τό σύνολο $F^2 \cap (t - F^2)$ είναι μή κενό και συμπεράνατε ότι κάθε στοιχείο c τού F γράφεται στην μορφή $c = a^2 + b^2$, $a, b \in F$.
γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ έχει μή τετριμμένη λύση στο F (τετριμμένη λύση είναι η $x = y = z = 0$).

Πρόβλημα 10. **α)** Έστω $\mathbb{F}_{p^m}$ και $\mathbb{F}_{p^n}$ τά υποσώματα τού $\overline{\mathbb{Z}}_p$ με p^n και p^m στοιχεία αντίστοιχα. Βρείτε τό σώμα $\mathbb{F}_{p^m} \cap \mathbb{F}_{p^n}$.

Πρόβλημα 11. Έστω $n \mid m$ και θεωρείστε τήν επέκταση $\mathbb{F}_{p^n} \leq \mathbb{F}_{p^m}$. Βρείτε τήν ομάδα $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_{p^n})$.