Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

200 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

$\boxed{\mathbf{2}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: $+\infty$ C: 2 D: 0

$\boxed{\mathbf{4}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

$\boxed{\mathbf{5}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

$\boxed{\mathbf{6}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{8}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

201 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

2 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 B: 2 C: 1/2 D: $+\infty$

3 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 4 B: 1 C: 2 D: 3

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{R}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

6 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

8 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

Γράφτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

202 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 2 D: 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x - 1)^n$ είναι
A: 2 B: 1/2 C: $+\infty$ D: 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 0 C: 2 D: 1

$\boxed{\mathbf{6}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

$\boxed{\mathbf{8}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x - 1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

203 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

4 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: $1/2$ C: 0 D: 2

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R}$

7 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

8 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

204 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

2 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

3 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

4 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: 1/2 C: 2 D: $+\infty$

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\emptyset$

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

8 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

Γράφτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

205 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

$\boxed{2}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: $+\infty$ C: 0 D: 1/2

$\boxed{3}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

$\boxed{4}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f: X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

$\boxed{5}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f: [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

$\boxed{6}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

$\boxed{8}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

206 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

$\boxed{2}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

$\boxed{3}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

$\boxed{4}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: 1/2 C: 2 D: $+\infty$

$\boxed{5}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{Z}$

$\boxed{6}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 4 B: 2 C: 1 D: 3

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

$\boxed{8}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

207 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 *B*: 2 *C*: 0 *D*: 1

2 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 1 *B*: 0 *C*: 2 *D*: 3

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 *B*: 2 *C*: 4 *D*: 1

4 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 *B*: 2 *C*: 3 *D*: 0

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

6 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 *B*: 1 *C*: 0 *D*: 3

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ *B*: $\mathbb{Q}$ *C*: $\mathbb{R}$ *D*: $\emptyset$

8 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x - 1)^n$ είναι
A: 2 *B*: $+\infty$ *C*: 0 *D*: 1/2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

208 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\emptyset$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

$\boxed{\mathbf{6}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{7}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: $+\infty$ C: 1/2 D: 2

$\boxed{\mathbf{8}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 4 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

209 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 2 C: 1 D: $+\infty$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{\mathbf{6}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 4

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

$\boxed{\mathbf{8}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

210 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 3

$\boxed{2}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ *B*: $\mathbb{R}$ *C*: $\emptyset$ *D*: $\mathbb{Q}$

$\boxed{3}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ *B*: 0 *C*: 1/2 *D*: 2

$\boxed{4}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 3 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 0

$\boxed{5}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 2 *B*: 3 *C*: 1 *D*: 0

$\boxed{6}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 *B*: 3 *C*: 1 *D*: 2

$\boxed{7}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 *B*: 4 *C*: 3 *D*: 1

$\boxed{8}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x - 1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 3 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

211 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R}\setminus[0,1]$, (γ) $(-1,1)\setminus\{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1,n+0.1)$.
A: 2 B: 1 C: 4 D: 3

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{R}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

4 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f: X\to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n\to x$ τότε $f(x_n)\to f(x)$, (β) Αν $G\subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

5 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x)=n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

6 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f:[1,2]\to\mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: 2 C: $+\infty$ D: 1/2

8 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x\in[0,1]$;
(i) $f_n(x)=\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x)=\chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A=(0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ και αν $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n\to\infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

212 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 B: 1/2 C: $+\infty$ D: 2

2 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

3 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 4 D: 3

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

6 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Q}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

213 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 0 B: 3 C: 1 D: 2

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

3 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

4 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 1 C: 2 D: $+\infty$

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\emptyset$

6 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

7 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 B: 4 C: 3 D: 1

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

214 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

2 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

3 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Q}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R}$

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 B: 1 C: 4 D: 2

6 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x - 1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 3 B: 0 C: 2 D: 1

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x - 1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 1/2 C: 0 D: 2

8 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

215 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

$\boxed{2}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{Z}$

$\boxed{3}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

$\boxed{4}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

$\boxed{5}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

$\boxed{6}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

$\boxed{7}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 B: 2 C: $+\infty$ D: 1/2

$\boxed{8}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 4

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

216 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 0 C: 2 D: 1/2

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

3 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

4 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Q}$ D: $\mathbb{R}$

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 4 C: 2 D: 3

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

8 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

217 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

2 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

3 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: $+\infty$ C: 0 D: 1/2

4 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

5 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 3 B: 2 C: 4 D: 1

7 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\mathbb{R}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

218 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{Q}$ D: $\emptyset$

3 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 2 C: 1 D: 1/2

4 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 4

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

8 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

219 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

2 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

3 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

4 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

5 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 B: 4 C: 3 D: 1

6 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x - 1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 1 C: 2 D: 1/2

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Z}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

220 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{2}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 2 C: 1 D: $+\infty$

$\boxed{3}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

$\boxed{4}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

$\boxed{5}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 4

$\boxed{6}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Q}$

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

$\boxed{8}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

221 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: $+\infty$ C: 0 D: 2

$\boxed{\mathbf{2}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{3}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

$\boxed{\mathbf{4}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

$\boxed{\mathbf{5}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 4 C: 2 D: 3

$\boxed{\mathbf{6}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

$\boxed{\mathbf{8}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Q}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{R}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

222 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

2 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 2 C: 1/2 D: 0

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\mathbb{R}$

4 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

6 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 3 C: 1 D: 2

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 4

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

223 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

2 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Q}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{Z}$

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R}\setminus[0,1]$, (γ) $(-1,1)\setminus\{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 3 B: 1 C: 4 D: 2

5 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

6 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

8 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 1 C: 1/2 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

224 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 2 C: $+\infty$ D: 0

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

$\boxed{\mathbf{4}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{5}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{8}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 4 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

225 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: $+\infty$ C: 1 D: 1/2

$\boxed{\mathbf{6}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

$\boxed{\mathbf{7}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

$\boxed{\mathbf{8}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

226 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{\mathbf{2}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: $+\infty$ C: 1/2 D: 1

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \geq 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{4}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 1 B: 3 C: 4 D: 2

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

$\boxed{\mathbf{6}}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

$\boxed{\mathbf{8}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{Q}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

227 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

2 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

4 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

6 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 0 C: 2 D: $+\infty$

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\mathbb{Q}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{R}$

8 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 B: 3 C: 1 D: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

228 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (β) $[-1,1]\setminus\{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1,n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1,n+0.1)$.
A: 2 B: 3 C: 4 D: 1

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ D: $\mathbb{Z}$

3 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 2 C: 0 D: 1/2

4 Η συνάρτηση $f: X\to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G\subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x\in X:\ f(x)\in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x\in X:\ f(x)\in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x\in X:\ f(x)\notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x\in\mathbb{R}$;
(i) $f_n(x)=\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

6 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, αν $f_n(x)=x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f:[1,2]\to\mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

8 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p>q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A=(0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ και αν $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n\to\infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

229 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι

A: $+\infty$ B: $1/2$ C: 1 D: 2

$\boxed{2}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;

(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$

A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

$\boxed{3}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το

A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{Q}$

$\boxed{4}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;

(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.

A: 1 B: 4 C: 2 D: 3

$\boxed{5}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;

(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.

A: 3 B: 0 C: 2 D: 1

$\boxed{6}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \geq 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.

A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{7}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;

(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.

A: 0 B: 3 C: 1 D: 2

$\boxed{8}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;

(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.

A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

230 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

$\boxed{2}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 2 C: 1 D: 1/2

$\boxed{3}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\emptyset$

$\boxed{4}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{5}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 2 B: 3 C: 4 D: 1

$\boxed{6}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

$\boxed{8}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

Γράφτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

231 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Η συνάρτηση $f: X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 4 C: 3 D: 2

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

$\boxed{\mathbf{4}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 B: 0 C: $+\infty$ D: 2

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

$\boxed{\mathbf{6}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

$\boxed{\mathbf{8}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

232 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R}\setminus[0,1]$, (γ) $(-1,1)\setminus\{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1,n+0.1)$.
A: 1 B: 4 C: 3 D: 2

$\boxed{2}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x=0$.
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

$\boxed{3}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

$\boxed{4}$ Η συνάρτηση $f:X\to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G\subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x\in X:\ f(x)\in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x\in X:\ f(x)\in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x\in X:\ f(x)\notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

$\boxed{5}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\boxed{6}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: 0 C: $+\infty$ D: 1/2

$\boxed{7}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x)=n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

$\boxed{8}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x\in\mathbb{R}$;
(i) $f_n(x)=\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A=(0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ και αν $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n\to\infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

233 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: $+\infty$ C: 1/2 D: 2

$\boxed{2}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ D: $\emptyset$

$\boxed{3}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

$\boxed{4}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

$\boxed{5}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

$\boxed{6}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 4

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

$\boxed{8}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

234 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

2 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 4

4 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

5 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x - 1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 0 C: 2 D: 1/2

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \geq 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{R}$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\mathbb{Z}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

235 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 3 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 0

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 3

3 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 3 *B*: 0 *C*: 1 *D*: 2

4 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 3 *B*: 1 *C*: 0 *D*: 2

5 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 *B*: 2 *C*: 1/2 *D*: $+\infty$

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 3 *B*: 4 *C*: 1 *D*: 2

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ *B*: $\mathbb{R}$ *C*: $\emptyset$ *D*: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

8 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 *B*: 3 *C*: 1 *D*: 2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

236 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

2 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 2 C: 3 D: 1

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Z}$ C: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D: $\emptyset$

5 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 1 C: 3 D: 0

6 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x - 1)^n$ είναι
A: $+\infty$ B: 2 C: 1/2 D: 1

8 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

237 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 B: 1/2 C: 2 D: $+\infty$

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\mathbb{Q}$ C: $\emptyset$ D: $\mathbb{Z}$

3 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

4 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 0

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 4

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

238 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

2 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: 1/2 C: 1 D: $+\infty$

3 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

4 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

5 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 3 B: 0 C: 1 D: 2

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{Z}$

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 3 B: 2 C: 1 D: 4

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

239 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 3 *B*: 4 *C*: 2 *D*: 1

2 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 0

3 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : \ f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : \ f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

4 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

6 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 3 *B*: 0 *C*: 1 *D*: 2

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ *B*: $\mathbb{R}$ *C*: $\mathbb{Z}$ *D*: $\mathbb{Q}$

8 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 *B*: $+\infty$ *C*: 1 *D*: 1/2

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

240 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;
(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.
A: 0 B: 3 C: 1 D: 2

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Q}$ B: $\mathbb{R}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\emptyset$

3 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 1 B: 4 C: 3 D: 2

4 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x - 1)^n$ είναι
A: 1/2 B: $+\infty$ C: 1 D: 2

5 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

7 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

8 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 1 C: 0 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

241 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{1}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Q}$ D: $\mathbb{R}$

$\boxed{2}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0, 1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 3 B: 2 C: 0 D: 1

$\boxed{3}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 2 B: 1/2 C: $+\infty$ D: 0

$\boxed{4}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 1 B: 2 C: 4 D: 3

$\boxed{5}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

$\boxed{6}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 1 C: 3 D: 2

$\boxed{7}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

$\boxed{8}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

Γράφτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

242 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι

A: $+\infty$ B: 0 C: 2 D: 1/2

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;

(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, (γ) $(-1,1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.

A: 4 B: 2 C: 1 D: 3

3 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;

(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.

A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

4 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;

(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.

A: 2 B: 0 C: 1 D: 3

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;

(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$

A: 1 B: 2 C: 0 D: 3

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.

A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

7 Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από ένα μετρικό χώρο X στο μετρικό χώρο Y είναι συνεχής. Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό, πόσες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν πάντα;

(α) $\{x \in X : f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό στο X, (β) $\{x \in X : f(x) \in Y\}$ είναι ανοιχτό στο X, (γ) $\{x \in X : f(x) \notin G\}$ είναι κλειστό στο X.

A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το

A: $\emptyset$ B: $\mathbb{R}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{Q}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

243 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 2 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 1 *B*: 4 *C*: 2 *D*: 3

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1,2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 0 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 3

$\boxed{\mathbf{4}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1,2)$, (β) $(-2,-1)$, (γ) $(10,+\infty)$.
A: 3 *B*: 1 *C*: 2 *D*: 0

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 *B*: 3 *C*: 1 *D*: 2

$\boxed{\mathbf{6}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \geq 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 0 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 3

$\boxed{\mathbf{7}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *B*: $\emptyset$ *C*: $\mathbb{Z}$ *D*: $\mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1 *B*: $+\infty$ *C*: 1/2 *D*: 2

Γράφτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

244 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

2 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{R}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 2 B: 0 C: 3 D: 1

4 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (2x - 1)^n$ είναι
A: 1 B: 1/2 C: $+\infty$ D: 2

5 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 2 B: 3 C: 0 D: 1

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

7 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, (γ) $(-1, 1) \setminus \{0\}$, (δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 B: 1 C: 4 D: 3

8 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

245 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση II (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι κατά τμήματα σταθερή.
A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

2 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

3 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

4 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 3 B: 1 C: 2 D: 0

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 2 C: 3 D: 1

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x - 1)^n$ είναι
A: 0 B: 2 C: $+\infty$ D: 1/2

8 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{R}$ B: $\emptyset$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x)f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

246 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 1 *B*: 3 *C*: 2 *D*: 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 *B*: 0 *C*: 2 *D*: 3

$\boxed{\mathbf{3}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 2 *B*: 3 *C*: 0 *D*: 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\mathbb{Z}$ *B*: $\mathbb{Q}$ *C*: $\emptyset$ *D*: $\mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 *B*: 3 *C*: 0 *D*: 2

$\boxed{\mathbf{6}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

$\boxed{\mathbf{7}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x-1)^n$ είναι
A: 1/2 *B*: $+\infty$ *C*: 2 *D*: 1

$\boxed{\mathbf{8}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 2 *B*: 3 *C*: 4 *D*: 1

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

247 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό σύνολο ακεραίων έχει ελάχιστο στοιχείο, (β) Αν η ακολουθία $x_n \ge 0$ συγκλίνει στο 0 τότε είναι τελικά φθίνουσα, (γ) Αν $(-1)^n x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε $x = 0$.
A: 2 B: 3 C: 1 D: 0

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

3 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, αν $g_n(x) = n^{-2}/(x-1)$;
(α) $(1, 2)$, (β) $(-2, -1)$, (γ) $(10, +\infty)$.
A: 1 B: 2 C: 3 D: 0

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 B: 3 C: 1 D: 2

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 B: 0 C: 2 D: 3

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ B: $\mathbb{Q}$ C: $\mathbb{Z}$ D: $\mathbb{R}$

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 0 B: 3 C: 2 D: 1

8 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 B: 2 C: 1/2 D: $+\infty$

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

248 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

1 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in [0,1]$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (iii) $h_n(x) = \chi_{[1/(n+1)^2,1/n^2]}(x)$
A: 0 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 2

2 Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 0 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 3

3 Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1,2]$, (β) $[1,+\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 *B*: 0 *C*: 2 *D*: 3

4 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική το εσωτερικό του συνόλου $A = \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ *B*: $\mathbb{Q}$ *C*: $\mathbb{Z}$ *D*: $\mathbb{R}$

5 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 2 *B*: 0 *C*: 3 *D*: 1

6 Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1,1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n-0.1, n+0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-0.1, n+0.1)$.
A: 2 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 4

7 Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(2x-1)^n$ είναι
A: 0 *B*: 1/2 *C*: $+\infty$ *D*: 2

8 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 2 *B*: 1 *C*: 3 *D*: 0

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0,1]$ είναι το σύνολο $[0,1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,1]$ στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\, dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10.** Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

249 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμ. Μαθηματικων – Αναλυση ΙΙ (Τμημα Α)

Τελικό Διαγώνισμα – 4 Ιουνίου 2019

$\boxed{\mathbf{1}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις έχουν ως συνέπεια τη συνέχεια της $f : X \to Y$ (X, Y μετρικοί χώροι);
(α) Αν $x_n \to x$ τότε $f(x_n) \to f(x)$, (β) Αν $G \subseteq Y$ ανοιχτό τότε $f^{-1}(G)$ ανοιχτό, (γ) Το $f^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό.
A: 2 *B*: 0 *C*: 3 *D*: 1

$\boxed{\mathbf{2}}$ Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$;
(i) $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$ (ii) $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ (iii) $h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)$
A: 1 *B*: 0 *C*: 3 *D*: 2

$\boxed{\mathbf{3}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική πόσα από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά;
(α) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (β) $[-1, 1] \setminus \{0\}$, (γ) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n - 0.1, n + 0.1]$, (δ) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(n - 0.1, n + 0.1)$.
A: 4 *B*: 2 *C*: 3 *D*: 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ Πόσες από τις παρακάτω συνθήκες έχουν ως συνέπεια την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$;
(α) Η f είναι φραγμένη. (β) Η f είναι συνεχής. (γ) Η f είναι συνεχής και φραγμένη.
A: 3 *B*: 2 *C*: 1 *D*: 0

$\boxed{\mathbf{5}}$ Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2x - 1)^n$ είναι
A: 1 *B*: 1/2 *C*: 2 *D*: $+\infty$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική η κλειστότητα του συνόλου $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το
A: $\emptyset$ *B*: $\mathbb{Z}$ *C*: $\mathbb{R}$ *D*: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, αν $f_n(x) = x/n^2$;
(α) $[1, 2]$, (β) $[1, +\infty)$, (γ) $\mathbb{R}$.
A: 1 *B*: 0 *C*: 2 *D*: 3

$\boxed{\mathbf{8}}$ Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
(α) Σε κάθε διάστημα θετικού μήκους υπάρχουν πάντα ρητοί αριθμοί, (β) Όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός, (γ) Για κάθε ρητό q υπάρχει ρητός $p > q$ τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος ρητός ανάμεσα στους q και p.
A: 2 *B*: 1 *C*: 0 *D*: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Βαθμολογείστε μόνο από αυτό το φύλλο.

Πρόβλημα 1: (1.5 μονάδα) Αποδείξτε ότι η κλειστότητα του συνόλου $A = (0, 1]$ είναι το σύνολο $[0, 1]$ (στο μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική). Ποια θα ήταν η κλειστότητα του ίδιου συνόλου αν στο $\mathbb{R}$ δίδαμε τη διακριτή μετρική;

Πρόβλημα 2: (1.5 μονάδα) Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και αν $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^1 g(x) f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x) f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέφετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • **Συνολικός αριθμός μονάδων 10**. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: *Μιχάλης Κολουντζάκης*

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!