Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Πρ. 1 Στο μετρικό χώρο $C([0,1])$ (συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$) με τη μετρική $\rho(f,g) = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$, δείξτε ότι το σύνολο P που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα (που προφανώς είναι στο $C([0,1])$) δεν είναι ανοιχτό ούτε κλειστό.

Λύση: Ας είναι $f_0 \in C([0,1])$ μια συνάρτηση που δεν είναι πολυώνυμο (π.χ., πάρτε μια οποιαδήποτε συνεχή αλλά όχι παραγωγίσιμη συνάρτηση) και ας είναι $M = \sup_{x\in[0,1]}|f_0(x)|$. Αν $p(x)$ είναι ένα πολώνυμο και το σύνολο των πολυωνύμων είναι ανοιχτό τότε υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $f \in C([0,1])$ είναι τέτοια ώστε $\rho(p,f) < \epsilon$ τότε να έπεται ότι η f είναι πολυώνυμο. Πάρτε ως f της συνάρτηση

$$q(x) = p(x) + \frac{\epsilon}{2M} f_0(x)$$

και παρατηρείστε ότι $|q(x)-p(x)|\epsilon/2$, όμως η $q(x)$ δεν είναι πολυώνυμο (αν ήταν τότε θα ήταν και η f_0), πράγμα που συνιστά αντίφαση, άρα το σύνολο των πολυωνύμων δεν είναι ανοιχτό. Με άλλα λόγια υπάρχουν μη πολυωνυμικές συναρτήσεις οσοδήποτε κοντά θέλουμε σε ένα πολυώνυμο, άρα το σύνολο των πολυωνύμων δεν είναι ανοιχτό.

Για να δείξουμε ότι δεν είναι κλειστό, πάρτε (από το θεώρημα του Weierstrass) μια οποιαδήποτε ακολουθία πολυωνύμων p_n που συγκλίνει ομοιόμορφα (στη ρ μετρική δηλαδή) στη συνάρτηση f_0. Αν το σύνολο των ππολυωνύμων ήταν κλειστό τότε θα έπρεπε η f_0 να είναι πολυώνυμο, πράγμα που δεν ισχύει.

Πρ. 2 Στον ίδιο μετρικό χώρο με το Πρόβλημα 1 δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1] : f(x) < 2\}$$

είναι ανοιχτό. Είναι το σύνολο

$$B = \{f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1] : f(x) \le 2\}$$

ανοιχτό; Είναι το B κλειστό;

Λύση: Ας είναι $f \in A$ και $\epsilon = \frac{1}{2}\inf_{x\in[0,1]}(2-f(x))$. Αν $g \in C([0,1])$ και $\rho(f,g) < \epsilon$ τότε

$$g(x) = (g(x)-f(x)) + f(x) \le |f(x)-g(x)| + f(x) < \epsilon + (2-2\epsilon) = 2-\epsilon < 2.$$

Άρα η ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(f) \subseteq A$.

Το σύνολο B δεν είναι ανοιχτό. Η συνάρτηση $f(x) = 2$ είναι στοιχείο του B όμως αυτή η συνάρτηση προσεγγίζεται οσοδήποτε καλά θέλουμε από στοιχεία εκτός του B, π.χ. τις συναρτήσεις $f(x) = 2+\epsilon$, άρα το B δε μπορεί να είναι ανοιχτό.

Το σύνολο B είναι κλειστό. Αν $f_n \in B$ και $f_n \to f$ (στη ρ μετρική) τότε για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $f_n(x) \to f(x)$, και αφού $f_n(x) \le 2$ έπεται ότι $f(x) \le 2$, άρα $f \in B$.

Πρ. 3 Δύο μετρικές ρ και d πάνω στο ίδιο σύνολο X λέγονται *ισοδύναμες* αν έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες, αν δηλ.

$$d(x_n,x) \to 0 \Longleftrightarrow \rho(x_n,x) \to 0,$$

για κάθε $x, x_n \in X$ (μια ακολουθία στοιχείων του X, με άλλα λόγια, συγκλίνει ως προς τη μία μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη).

(1) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{R}^n$ οι μετρικές $d_\infty(x,y)$, $d_1(x,y)$ και $d_2(x,y)$ είναι ανά δύο ισοδύναμες. Θυμίζουμε

$$d_\infty(x,y) = d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_j-y_j| : j = 1,2,\ldots,n\},$$

$$d_1(x,y) = d_1((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sum_{j=1}^n |x_j-y_j|,$$

και

$$d_2(x,y) = d_2((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|\right)^{1/2}.$$

(2) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{Z}$ η διακριτή μετρική και η συνηθισμένη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

(3) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{R}$ η διακριτή μετρική και η συνηθισμένη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ δεν είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

(4) Αποδείξτε ότι για $X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ συνεχής}\}$ η ομοιόμορφη μετρική

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

και η L_1 μετρική

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

δεν είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Υπόδειξη: Εξετάστε την ακολουθία $f_n \in C([0,1])$ με $f_n(x) = x^n$ ως προς τη σύγκλιση και με τις δύο μετρικές.

Λύση: (1): Εύκολα μπορεί κανείς να δεί ότι αν $d(x,y)$ είναι μια οποιαδήποτε από τις τρεις μετρικές $d_\infty(x,y), d_1(x,y)$ και $d_2(x,y)$ τότε $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$, όπου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$, αν και μόνο αν

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,j} = x_j, \text{ για κάθε } j = 1,2,\ldots,n,$$

αν δηλ. τα διανύσματα x_k συγκλίνουν *κατά συνιστώσες* στο διάνυσμα x. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες, αφού για να ελέγξουμε για κάθε μια τη σύγκλιση $x_k \to x$ αρκεί να ελέγξουμε την ίδια πρόταση, ότι δηλ. $x_k \to x$ σε κάθε συντεταγμένη.

(2): Αν $x, x_n \in \mathbb{Z}$ τότε η σύγκλιση $x_n \to x$ και ως προς τις δύο μετρικές σημαίνει το ίδιο πράγμα: ότι η ακολουθία x_n είναι τελικά σταθερή με τελική τιμή x.

(3): Αν $x_n = 1/n$ τότε $x_n \to 0$ ως προς τη συνηθισμένη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά δε συγκλίνει ως προς τη διακριτή μετρική αφού στη διακριτή μετρική η απόσταση του $1/n$ απο το 0 είναι πάντα ίση με 1 και άρα δεν πάει στο 0.

(4): Ακολουθώντας την υπόδειξη, παρατηρούμε ότι η ακολουθία f_n τείνει στο $f = 0$ ως προς την L_1 μετρική (υπολογίστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς) αλλά $\rho(f_n, f) = 1$, άρα δεν ισχύει η σύγκλιση ως προς την ομοιόμορφη μετρική.

Πρ. 4 Ας είναι ρ και d δυο ισοδύναμες μετρικές πάνω στο ίδιο σύνολο X (δείτε Πρόβλημα 3 για τον ορισμό).

(1) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό ως προς τη μετρική ρ αν και μόνο αν είναι κλειστό ως προς τη μετρική d. Ομοίως για ανοιχτά σύνολα.

(2) Ας είναι μια συνάρτηση $f : X \to Y$, όπου Y είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική η. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής ως προς τη μετρική ρ (ως συνάρτηση δηλ. ανάμεσα στους μετρικούς χώρους (X,ρ) και (Y,η)) αν και μόνο αν είναι συνεχής ως προς τη μετρική d (ως συνάρτηση δηλ. ανάμεσα στους μετρικούς χώρους (X,d) και (Y,η)).

Λύση:

(1): Ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν ισχύει η συνεπαγωγή (για οποιαδήποτε επιλογή των x, x_n):

$$(x_n \in A \text{ και } x_n \to x) \Longrightarrow x \in A.$$

Εφόσον οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες η σύγκλιση $x_n \to x$ που βρίσκεται στην υπόθεση ισχύει υπό τη μια μετρική αν και μόνο αν ισχύει υπό την άλλη μετρική. Με άλλα λόγια η πρόταση «A

είναι κλειστό» δεν αλλάζει αν πάμε σε μια ισοδύναμη μετρική, αφού δεν αλλάζει η ισοδύναμή της πρόταση.

(2): Όπως και το προηγούμενο. Η συνέχεια της f σημαίνει ακριβώς

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

Η πρόταση αυτή δε μεταβάλλεται αν πάμε από μια μετρική του X σε μια ισοδύναμή της. Κατ' αρχήν δε μεταβάλλεται το συμπέρασμα που εξαρτάται μόνο από το χώρο Y και τη μετρική του. Επίσης δε μεταβάλλεται η υπόθεση γιατί οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες. Άρα η συνέχεια της f δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε τη μετρική του X με μια ισοδύναμή της.

Πρ. 5 Σε ένα μετρικό χώρο ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται *φραγμένο* αν περιέχεται σε κάποια ανοιχτή μπάλα (δίσκο), αν υπάρχει δηλ. $x \in X$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_r(x) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\}$, όπου d η μετρική του χώρου.

(1) Δείξτε ότι δύο ισοδύναμες μετρικές στο X (δείτε Πρόβλημα 3 για τον ορισμό) δεν έχουν απαραίτητα τα ίδια φραγμένα σύνολα. Βρείτε δηλ. παράδειγμα ενός χώρου X με δύο ισοδύναμες μετρικές ρ και d και ένα σύνολο $A \subseteq X$ που να είναι φραγμένο ως προς τη μετρική ρ αλλά όχι ως προς τη μετρική d.
Υπόδειξη: Αν η μετρική σε ένα χώρο είναι η διακριτή τότε όλα τα σύνολα είναι φραγμένα.

(2) Αν ο χώρος X έχει μετρική d δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\rho(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

ορίζει επίσης μια μετρική στο X, η ρ είναι ισοδύναμη με τη d, και κάθε σύνολο είναι φραγμένο ως προς τη μετρική ρ.

(3) Αν ο χώρος X έχει μετρική d δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\eta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

ορίζει επίσης μια μετρική στο X, η η είναι ισοδύναμη με τη d, και κάθε σύνολο είναι φραγμένο ως προς τη μετρική η.
Υπόδειξη: Για την τριγωνική ανισότητα θα χρειαστείτε ότι η συνάρτηση $\dfrac{x}{1+x}$ είναι αύξουσα για $x \ge 0$.

Λύση: (1): Όπως λέει η υπόδειξη σε κάθε διακριτό χώρο όλα τα σύνολα είναι φραγμένα. Αυτό γιατί αν x είναι οποιοδήποτε σημείο του χώρο τότε όλος ο χώρος (άρα και κάθε υποσύνολό του) περιέχεται στην ανοιχτή μπάλα $B_2(x)$ με κέντρο το x και ακτίνα 2 (αφού όλα τα σημεία του χώρου απέχουν από το x απόσταση 1). Είδαμε προηγουμένως ότι στο χώρο $X = \mathbb{Z}$ (ακέραιοι) η συνηθισμένη μετρική είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική. Όμως στη συνηθισμένη μετρική υπάρχουν και μη φραγμένα σύνολα, για παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ή και ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{Z}$. Το ότι αυτά το σύνολα δεν είναι φραγμένα είναι σχεδόν προφανές. Ένας τρόπος να το δείξει κανείς είναι να κάνει την παρατήρηση ότι οι ανοιχτές μπάλες στο $\mathbb{Z}$ ως προς τη συνηθισμένη μετρική είναι πεπερασμένα σύνολα (οι ακέραιοι ενός φραγμένου διαστήματος).

(2): Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι η ποσότητα $\rho(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ είναι όντως μια μετρική. Η μόνη ιδιότητα της μετρικής που δεν έχει προφανή απόδειξη είναι η τριγωνική ανισότητα $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ ή, διαφορετικά,

$$\min d(x,y), 1 \le \min d(x,z), 1 + \min d(z,y), 1.$$

Αν το 1 είναι το ελάχιστο σε οποιοδήποτε από τους δύο προσθετέους στο δεξί μέλος τότε, αφού το αριστερό μέλος είναι το πολύ 1, είναι σωστή ανισότητα. Αν όχι, αυτό σημαίνει ότι $d(x,z) < 1$ και $d(z,y) \le 1$ που συνεπάγεται, από την τριγωνική ανισότητα για την $d(\cdot,\cdot)$, ότι και $d(x,y) < 1$, οπότε και στα τρία ελάχιστα που εμφανίζονται επικρατεί ο όρος d έναντι του 1 και η ανισότητά μας γίνεται η τριγωνική ανισότητα για την d, η οποία ισχύει.

Τέλος είναι σχεδόν προφανές ότι

$$d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \min\{d(x_n, x), 1\} \to 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η d και η ρ είναι ισοδύναμες μετρικές.

(3): Και σε αυτή την περίπτωση το μόνο πράγμα που δεν είναι προφανές είναι ότι η $\eta(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Αν $a = d(x,y), b = d(z,x), c = d(y,z)$, οπότε και ισχύει $a \le b + c$ (τριγωνική ανισότητα για την d), πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}. \tag{1}$$

Αν ένα από τα b, c είναι μεγαλύτερο του a, τότε από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x}{1+x}$ είναι αύξουσα (όπως λέει στην υπόδειξη) έπεται ότι ισχύει η (1) (κρατώντας μόνο τον μεγαλύτερο όρο στα δεξιά αρκεί). Αλλιώς, αν δηλ. $b \le a$ και $c \le a$ έχουμε

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b+c}{1+a} = \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$