Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Πρ. 1 Αν $g, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty g(x) f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

Πρ. 2 Ποια η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^\infty x^n,\ \sum_{n=1}^\infty x^n/n,\ \sum_{n=1}^\infty nx^n,\ \sum_{n=1}^\infty x^n/n^2,\ \sum_{n=1}^\infty x^n/n!,\ \sum_{n=1}^\infty (x/n)^n,\ \sum_{n=1}^\infty (nx)^n;$$

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης σε κάθε μια από τις παραπάνω αποφανθείτε επίσης για το αν η σειρά συγκλίνει ή όχι για $x = \pm R$.

Πρ. 3 Σε ποια διαστήματα $[a,b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty 2^{n+1}(x-1)^n$;

Πρ. 4 Αποδείξτε ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακέραιους συντελεστές και άπειροι από αυτούς δεν είναι 0, τότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι ≤ 1.

Πρ. 5 Αν X είναι ένας χώρος με μετρική d_X και Y είναι ένας χώρος με μετρική d_Y δείξτε ότι αν ορίσουμε, στο χώρο $X \times Y$, τη συνάρτηση

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2), \tag{1}$$

τότε αυτή είναι μια μετρική στο χώρο $X \times Y$ (ελέγξτε δηλ. ότι αυτή ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα). Δείξτε το ίδιο για τη συνάρτηση

$$d'((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}. \tag{2}$$

Πρ. 6 Στο χώρο $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d_w(x,y) = \sum_{j=1}^d w_j |x_j - y_j|.$$

Εδώ $w = (w_1, \ldots, w_d)$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα με $w_j > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$, και $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d)$ είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία (διανύσματα) του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η $d_w(\cdot,\cdot)$ είναι μετρική στο χώρο $\mathbb{R}^d$. Γιατί δεν είναι αποδεκτό το να μηδενίζεται κάποιο από τα w_j; (Με άλλα λόγια, γιατί δε μπορούμε να υποθέσουμε $w_j \ge 0$ αντί για $w_j > 0$ για όλα τα j;)

Ίδιο ερώτημα για τη συνάρτηση $d'_w(x,y) = \max\{w_j|x_j - y_j| :\ j = 1, 2, \ldots, d\}$.

Πρ. 7 Ας είναι X το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ (εννοείται με πλευρικές παραγώγους στα άκρα). Δείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι μετρική στο X.

$$d(f,g) = |f(0) - g(0)| + \int_0^1 \left|f'(x) - g'(x)\right| dx.$$