Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Πρ. 1 Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής $f : [0, 10] \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f = 1, \text{ και } \int_2^5 f = 3, \text{ και } \int_6^7 = 1, \text{ και } \int_0^{10} f = 100.$$

Λύση: Φτιάξτε την f να είναι παντού 0 εκτός από τα διαστήματα $[0, 1], [2, 5], [6, 7], [9, 10]$. Στα διαστήματα αυτά πάρτε την f να έχει γράφημα ένα τρίγωνο μα βάση το διάστημα και ύψος τέτοιο ώστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα αυτό να είναι αυτό που πρέπει, δηλ., για τα παραπάνω διαστήματα να είναι 1, 3, 1 και (100-(1+3+1)).

Πρ. 2 Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f < \infty,$$

με $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, και με $f(x) > 0$ για κάθε $x \ge 0$.

Λύση: Φτιάξτε πρώτα μια συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ παίρνοντάς την να είναι 0 παντού εκτός από τα διαστήματα $[n, n + \frac{2}{n^3}]$, για $n \ge 10$. Μέσα σε κάθε τέτοιο διάστημα πάρτε τη g να έχει ως γράφημα ένα τρίγωνο με βάση το διάστημα αυτό και ύψος n, πράγμα που συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμά της g μέσα σε κάθε τέτοιο διάστημα είναι $1/n^2$ και άρα για κάθε R ισχύει

$$\int_0^R g \le \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Μένει μόνο να εξασφαλίσουμε ότι η συνάρτησή μας είναι παντού αυστηρά θετική. Παίρνουμε ως τελική μας συνάρτηση τη συνάρτηση

$$f(x) = g(x) + \mathbf{1}(0 \le x < 1) + \mathbf{1}(x \ge 1)\,\frac{1}{x^2},$$

για την οποία εύκολα επαληθεύουμε όλες τις παραπάνω ιδιότητες.

Πρ. 3 Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n = 1$ για κάθε n και επίσης

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ και } \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Λύση: Χωρίστε πρώτα το διάστημα $[0, 1]$ σε διαστήματα μήκους 1/10:

$$[0, 1] = \bigcup_{n=0}^{9} I_n^1, \text{ όπου } I_n^1 = \left[\frac{n}{10}, \frac{n+1}{10}\right].$$

Ορίστε τις 10 πρώτες συναρτήσεις της ακολουθίας $f_n(x)$ να είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις αυτών των διαστημάτων πολλαπλασιασμένες επί 10 (ώστε να έχουν ολοκλήρωμα 1):

$$f_n(x) = 10\chi_{I_n^1}(x), \text{ για } n = 0, 1, \ldots, 9.$$

Στο δεύτερο στάδιο χωρίστε το $[0,1]$ σε διαστήματα μήκους 1/100:

$$[0,1] = \bigcup_{n=0}^{99} I_n^2, \text{ όπου } I_n^2 = \left[\frac{n}{10^2}, \frac{n+1}{10^2}\right].$$

Ορίστε τις επόμενες συναρτήσεις f_n να είναι οι χαρακτηριστικές αυτών των διαστημάτων πολλαπλασιασμένες επί 100, ώστε να έχουν και πάλι ολοκλήρωμα 1. Συνεχίστε επ' άπειρον με τον ίδιο τρόπο χωρίζοντας κάθε φορά το διάστημα $[0,1]$ σε ολοένα και μικρότερα διαστήματα.

Με τον τρόπο αυτό, αν $x \in [0,1]$ τότε η ακολουθία $f_n(x)$ θα πάρει άπειρες φορές την τιμή 0 και άπειρες φορές την τιμή 1, άρα τα $\liminf$ και $\limsup$ της ακολουθίας $f_n(x)$ είναι 0 και 1 αντίστοιχα.

Πρ. 4 Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}\}$ είναι αριθμήσιμο, ότι υπάρχει δηλ. μια ακολουθία

$$p_n \in \mathbb{Z}^2, \ n = 1,2,3,\ldots,$$

τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}^2$ να ισούται με p_n για κάποιο n.

Λύση: Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε ένα τρόπο να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του $\mathbb{Z}^2$, το ένα μετά το άλλο, χωρίς να μείνει κανένα στοιχείο απ' έξω. Η εικόνα του $\mathbb{Z}^2$ ως τα ακέραια σημεία του επιπέδου μας βοηθάει σε αυτό. Μπορούμε εύκολα να κάνουμε την απαρίθμησή μας ξεκινώντας από το $(0,0)$ και κινούμενοι σε μια σπείρα όπως φαίνεται στο σχήμα:

```
37—36—35—34—33—32—31
|                  |
38  17—16—15—14—13  30
|   |           |   |
39  18   5— 4— 3  12  29
|   |    |     |  |   |
40  19   6  1— 2  11  28
|   |    |        |   |
41  20   7— 8— 9—10  27
|   |                 |
42  21—22—23—24—25—26
|
43—44—45—46—47—48—49...
```

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του $\mathbb{Z}^2$ είναι ο εξής. Γράφουμε

$$A_k = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : \ |a|,|b| \le k\right\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ αφού κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}^2$, ας πούμε το (x,y) ανήκει σε κάποιο A_k (ανήκει στο $A_{\max\{|x|,|y|\}}$ και σε όλα τα A_k με μεγαλύτερο δείκτη). Είναι επίσης φανερό ότι κάθε σύνολο A_k είναι πεπερασμένο (για την ακρίβεια $|A_k| = (2k+1)^2$ αλλά αυτό δε μας χρειάζεται). Ιδού λοιπόν ένας τρόπος να απαριθμήσουμε το $\mathbb{Z}^2$: Απαριθμούμε τα στοιχεία του A_1, μετά τα στοιχεία του A_2, μετά τα στοιχεία του A_3 και συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Το σημαντικό σε αυτό είναι ότι κάθε A_k είναι πεπερασμένο σύνολο και άρα κάθε απαρίθμηση ενός A_k κάποια στιγμή τελειώνει και αρχίζει η απαρίθμηση του A_{k+1}, κλπ. Έτσι δε μένει τίποτα απ' έξω.

Πρ. 5 Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in (0,1)$ τέτοια ώστε $x_n \to 0$ και επίσης να μην υπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ώστε η x_n να είναι φθίνουσα για $n \ge n_0$. Η ακολουθία x_n δεν πρέπει να είναι δηλαδή τελικά φθίνουσα.

Λύση: Πάρτε την ακολουθία $x_n = 1/n$. Αυτή είναι φθίνουσα όμως. Κάντε το εξής: εναλλάξτε τους όρους x_{10n} και x_{10n+1}. Έτσι διατηρείται η σύγκλιση και καταστρέφεται η μονοτονία.

Πρ. 6 Δείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $M > 0$ να υπάρχει διάστημα μήκους $\ge M$ στο οποίο η f να είναι φθίνουσα και επίσης η f να μην είναι αύξουσα σε κανένα διάστημα μήκους > 2.

Λύση: Ξεκινείστε με τη συνάρτηση $f(n) = n$, η οποία προφανώς είναι 1-1 και επί αλλά είναι αύξουσα. Χωρίστε το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ σε αυξανόμενα διαστήματα, π.χ. ως εξής

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\right\}.$$

Μέσα σε κάθε τέτοιο διάστημα (που κατ' αρχάς η f το απεικονίζει στον εαυτό του) αντιστρέψτε την f ώστε και πάλι να το απεικονίζει στον εαυτό του αλλά με φθίνουσα σειρά, να έχουμε στη νέα μας f δηλ.

$$f(2^{n+1} - 1) = 2^n, f(2^{n+1} - 2) = 2^n + 1, \ldots, f(2^n) = 2^{n+1} - 1.$$

Έχουμε έτσι πετύχει η f να είναι φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ και είναι φανερό ότι δε μπορεί να είναι αύξουσα σε διαστήματα μήκους 3 και άνω.

Πρ. 7 Ας είναι $A = [1, 2] \cup [4, 6]$. Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in \mathbb{R}$ που να έχει ως σημεία συσσώρευσης ακριβώς τα σημεία του συνόλου A.

Λύση: Χωρίστε την πραγματική ευθεία σε διαστήματα μήκους 1/10 ως εξής:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right).$$

Ο χωρισμός αυτός ορίζει κι ένα χωρισμό του A σε τέτοια διαστήματα. Ξεκινείστε φτιάχνοντας την ακολουθία σας παίρνοντας ως πρώτο κομμάτι της ακολουθίας σας από ένα στοιχείο σε κάθε διάστημα του παραπάνω χωρισμού που τέμνει το A (αν υπάρχουν N τέτοια διαστήματα τότε έτσι ορίζετε τα N πρώτα στοιχεία της ακολουθίας σας, τα $x_1, \ldots, x_N$).

Στο επόμενο βήμα χωρίζετε την πραγματική ευθεία σε διαστήματα μήκους $\frac{1}{100}$ και ορίζετε και πάλι τα επόμενα στοιχεία της x_n παίρνοντας από ένα τέτοιο στοιχείο σε κάθε διάστημα του παραπάνω χωρισμού που τέμνει το A.

Συνεχίζετε κατ' αυτό τον τρόπο, επ' άπειρο. Φροντίζουμε μάλιστα όλα τα x_n να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, κι έτσι η ακολουθία που φτιάχνουμε έχει όλα τα οριακά της σημεία να είναι και σημεία συσσώρευσης.

Αν $a \in A$ τότε αυτό ανήκει σε κάποιο διάστημα μήκους 10^{-k} για κάθε $k \ge 0$, άρα υπάρχουν στοιχεία της ακολουθίας x_n που απέχουν από το a οσοδήποτε μικρή απόσταση, άρα το a είναι σημείο συσσώρευσης της x_n.

Μένει να δείξουμε ότι όλα τα σημεία συσσώρευσης της x_n είναι στοιχεία του A. Ας είναι λοιπόν b ένα σημείο συσσώρευσης της x_n και ας είναι επίσης $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει κάποιο x_ν που να είναι ϵ-κοντά στο b και μάλιστα μπορούμε να διαλέξουμε το δείκτη ν να είναι οσοδήποτε μεγάλος. Τότε υπάρχει καί κάποιο στοιχείο του a που είναι ϵ κοντά στο x_ν (αφού το x_ν διαλέχτηκε να είναι σε κάποιο διάστημα που τέμνει το A μήκους 10^{-k}, με k όσο μεγάλο θέλουμε). Αυτό σημαίνει ότι το b είναι σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας σημείων του A, άρα (επειδή το A είναι δύο κλειστά διαστήματα) ανήκει στο A, όπως έπρεπε να δείξουμε.

Πρ. 8 Δείξτε ότι υπάρχει μια επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ τέτοια ώστε τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ να έχουν ως σημεία συσσώρευσης ακριβώς τους αριθμούς στο διάστημα $[-50, 100]$.

Λύση: Ξεκινείστε στην αρχή με πρόσημο $\epsilon_n = +1$ για τους πρώτους όρους της σειράς έως ότου το άθροισμα των όρων ξεπεράσει το 100. Μετά αλλάξετε το πρόσημο έως ότου το μερικό άθροισμα της σειράς να πέσει κάτω από το -50. Αλλάξτε μετά το πρόσημο σε +1 έως ότου περάσετε το 100, μετά σε -1 έως ότου κατέβετε κάτω από το -50, κλπ. Το ότι κάθε φορά θα φτάσετε, μετά από κάποια βήματα, στόχο σας είναι συνέπεια του ότι η σειρά $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει και άρα τα μερικά της αθροίσματα γίνονται οσοδήποτε μεγάλα θέλετε.

Σε κάθε «πέρασμα» που κάνουν τα μερικά σας αθροίσματα από το 100 έως το -50 και από το -50 έως το 100 το βήμα είναι κάθε φορά μικρότερο και τείνει στο 0. Αυτό σημαίνει ότι αν $x \in [-50, 100]$ τότε σε κάθε πέρασμα θα υπάρχει ένα μερικό άθροισμα που είναι ολοένα και πιο κοντά στο x, άρα το x είναι σημείο συσσώρευσης.

Δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης εκτός του διαστήματος $[-50, 100]$ αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων βγαίνει εκτός του διαστήματος κάθε φορά και λιγότερο (το πόσο βγαίνει τείνει στο 0).