

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινήτου (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.



Όνομα, Τμήμα, Α.Μ.:

100 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8:

Δείξτε ταυτότητα πριν φύγετε. Φεύγετε μόνο αφού παραδώσετε αυτό το φύλλο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Υπόδειγμα Ενδιάμεσου Διαγωνίσματος

1 Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^2/n^2$. Σε πόσα από τα παρακάτω σύνολα συγκλίνει η f_n ομοιόμορφα;
(i) $A = \mathbb{R}$, (ii) $B = [0, +\infty)$, (iii) $C = (-2, 2)$.

A: 3 B: 1 C: 0 D: 2

2 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές για κάθε μετρικό χώρο X με μετρική d ;

(α) Το σύνολο X είναι άπειρο σύνολο. (β) Κάθε φραγμένο σύνολο $A \subseteq X$ είναι πεπερασμένο. (γ) Κάθε τελικά σταθερή ακολουθία συγκλίνει.

A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

3 Πόσες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(1, 2)$;

(i) $f(x) = \sin(1/x)$, (ii) $g(x) = \sin(2/(x-1))$, (iii) $h(x) = \sqrt{x-1}$.

A: 0 B: 2 C: 3 D: 1

4 Για να είναι μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη ποιο από τα παρακάτω πρέπει οπωσδήποτε να συμβαίνει;

A: Να είναι συνεχής στο $[0, 1]$. B: Να παίρνει πεπερασμένες στο πλήθος τιμές. C: Να είναι μη αρνητική. D: Να είναι φραγμένη.

5 Πόσες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$;

(i) $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, (ii) $g_n(x) = \frac{x}{n}$, (iii) $h_n(x) = x + \frac{\sin(nx)}{n}$.

A: 1 B: 0 C: 3 D: 2

6 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

(i) Αν μια συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει πεπερασμένες στο πλήθος τιμές τότε είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

(ii) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

(iii) Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1, 2]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(iv) Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $\mathbb{Z} \cap [10, 100]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

A: 1 B: 4 C: 3 D: 2

7 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

(i) Αν $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E , τότε αν η f είναι φραγμένη έπεται ότι και οι f_n είναι φραγμένες, αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

(ii) Αν $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E , τότε η f είναι φραγμένη.

(iii) Αν $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων, και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, τότε η f είναι φραγμένη.

A: 1 B: 3 C: 2 D: 0

8 Πόσες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

(i) Η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε είναι αναγκαστικά και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

(ii) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Τότε είναι αναγκαστικά και ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

(iii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$ και επίσης στο $[1, 2]$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2]$.

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

Γράψτε τις λύσεις των προβλημάτων στην πίσω σελίδα. Παραδίνετε μόνο αυτό το χαρτί.

Πρόβλημα: (1.5 μονάδες) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ που να συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = e^{-|x|}$ για $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα: (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν για την f όλα τα παρακάτω:

$$\int_0^1 f = 3, \int_3^6 f = 5, \int_0^{10} f = -10, f \equiv 0 \text{ στο } [4, 5].$$

Απαγορεύεται η αποχώρηση για 1 ώρα. • Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις και χωρίς κομπιουτεράκι. • Επιστρέψετε το χαρτί αυτό και όλα τα πρόχειρα. • Βαθμολογείστε μόνο από το χαρτί αυτό. • Κάθε σωστή απάντηση στις πολλαπλές επιλογές μετράει 1 και κάθε λάθος μετράει αρνητικά με τέτοιο τρόπο ώστε αν «παίξετε» τυχαία την απάντησή σας, η μέση τιμή των πόντων που παίρνετε είναι 0. • Κενές απαντήσεις μετράνε 0. • Υπάρχει ακριβώς μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση. • Συνολικός αριθμός μονάδων 10. Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών: 70%. Προβλήματα: 30%.

Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΑΝΑΓΚΑΣΤΙΚΑ!