Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Πρ. 1 Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα (με θετικό μήκος) υπάρχει ρητός αριθμός. Δείξτε γιατί αυτό συνεπάγεται ότι σε κάθε διάστημα (με θετικό μήκος) υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

Λύση: Οι αριθμοί k/N, για $N \in \mathbb{N}$ σταθερό και $k \in \mathbb{Z}$ είναι μια άπειρη αριθμητική πρόοδος με βήμα ίσο με $1/N$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε τέτοιο αριθμό υπάρχει ένας στα αριστερά του κι ένας στα δεξιά του με απόσταση $1/N$. Αν επιλέξουμε το N να είναι τέτοιο ώστε το $1/N$ να είναι μικρότερο από το μήκος του διαστήματος τότε το διάστημα αυτό θα περιέχει σίγουρα ένα αριθμο της μορφής k/N, αλλιώς ο πρώτος τέτοιος αριθμός αριστερά του διαστήματος και ο πρώτος τέτοιος αριθμός δεξιά του διαστήματος θα απέχουν μεταξύ τους $> 1/N$ ενώ είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου.

Υποθέτοντας ότι σε κάθε διάστημα έχουμε ρητό αριθμό, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια άπειρη ακολουθία ρητών στο διάστημα αυτό, έστω $I_1 = (a, b)$. Πράγματι, επικαλούμενοι το προηγούμενο θα υπάρχει ένας ρητός $q_1 \in I_1$. Παίρνουμε μετά I_2 να είναι ένα υποδιάστημα του I_1 που να μην περιέχει τον q_1 και επικαλούμαστε ξανά το προηγούμενο για το διάστημα I_2 παίρνοντας έτσι ένα δεύτερο ρητό $q_2 \in I_2 \subseteq I_1$ που είναι από κατασκευής διαφορετικός από τον q_1. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία ρητών στο I_1.

Πρ. 2 Βρείτε μια συνάρτηση $f : [10, 20] \to [0, +\infty)$, φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη, για την οποία να μην ισχύει το «Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρώματος», να μην υπάρχει δηλ. σημείο $a \in [10, 20]$ τ.ώ. $f(a)$ να ισούται με το μέσο όρο της f στο διάστημα αυτό: $(1/10) \int_{10}^{20} f(x)\,dx$.

Λύση: Πάρτε τη συνάρτηση $f(x) = \chi_{[10,15]}(x)$ η οποία έχει μέσο όρο $\frac{1}{10} \int_{10}^{20} \chi_{[10,15]}(x)\,dx = \frac{1}{2}$ ενώ οι μόνες τιμές που παίρνει είναι η 0 και η 1.

Πρ. 3 Αποδείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = \frac{1}{n} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπόδειξη: Πρέπει, αν $\epsilon > 0$, να βρείτε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0, 1]$ τ.ώ. $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \le \epsilon$. Δοκιμάστε μια διαμέριση που το πρώτο της διάστημα από αριστερά να είναι το $[0, \epsilon/2]$ και από κει και πέρα να έχει όλα τα άλλα της διαστήματα ισομήκη με το πλήθος τους να είναι ένας μεγάλος φυσικός αριθμός N. Επιλέξτε το N ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη παίρνουμε μια διαμέριση $\mathcal{P}$ της οποίας το πρώτο διάστημα είναι το $[0, \epsilon/2]$. Στο διάστημα $[\epsilon/2, 1]$ η διαμέριση αποτελείται από N ίσα διαστήματα μήκους $(1-\epsilon/2)/N$ το καθένα. (Ο αριθμός N απομένει να επιλεγεί. Αργότερα θα τον επιλέξουμε τόσο μεγάλο ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.)

Παρατηρούμε μετά ότι η συνάρτηση f έχει σε κάθε διάστημα infimum ίσο με το 0 αφού σε κάθε διάστημα είναι ≥ 0 και παίρνει κάπου την τιμή 0. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα κάτω Riemann αθροίσματα είναι, άρα αυτό που απομένει να δειχτεί είναι ότι μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\mathcal{P}$ ώστε $U(f, \mathcal{P}) \le \epsilon$.

Σε κάθε διάστημα η συνάρτησή μας παίρνει τιμές από 0 ή 1 άρα το supremum της σε κάθε διάστημα είναι 0 ή 1. Είναι ίσο με 1 αν και μόνο αν το διάστημα περιέχει σημείο της μορφής $1/n$ (αφού μόνο σε αυτά τα σημεία η f παίρνει την τιμή 1. Στο άνω άθροισμα $U(f, \mathcal{P})$ υπάρχει μια συνεισφορά από κάθε διάστημα της $\mathcal{P}$. Η συνεισφορά από το πρώτο διάστημα της $\mathcal{P}$ είναι $\epsilon/2$ αφού το supremum εκεί είναι 1 και το μήκος του διαστήματος είναι $\epsilon/2$. Από τα υπόλοιπα N διαστήματα (στο διάστημα $[\epsilon/2, 1]$) συνεισφέρουν κάτι μη μηδενικό μόνο τα διαστήματα που περιέχουν κάποιον αριθμό της μορφής $1/n$, για κάποιο φυσικό αριθμό n. Το πλήθος αυτών των διαστημάτων της διαμέρισης είναι το πολύ

$$2\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil.$$

Για να το δούμε αυτό μετράμε πρώτα τους φυσικούς αριθμούς n τέτοιους ώστε $\epsilon/2 \le 1/n$, και βρίσκουμε ότι είναι το πολύ $\lceil 2/\epsilon \rceil$. Αφού ο καθένας τους μπορεί να συμμετέχει (ως άκρο) σε δύο το πολύ διαστήματα της διαμέρισης διπλασιάζουμε αυτή την ποσότητα. Καθένα από αυτά τα διαστήματα (που περιέχουν κάποιον όρο της μορφής $1/n$) συνεισφέρει στο $U(f, \mathcal{P})$ ακριβώς $(1 - \epsilon/2)/N$. Συλλέγοντας όλες τις συνεισφορές στο $U(f, \mathcal{P})$ έχουμε

$$U(f, \mathcal{P}) \le \frac{\epsilon}{2} + 2\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil \cdot \frac{1 - \epsilon/2}{N}.$$

Επιλέγουμε τώρα το N ώστε ο δεύτερος προσθετέος να είναι $\le \epsilon/2$ και παίρνουμε συνολικά $U(f, \mathcal{P}) \le \epsilon$. Αφού το ϵ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Πρ. 4 Η $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [f(1), f(0)] \to [0, 1]$. Δείξτε ότι για κάθε $M \in [f(1), f(0)]$ ισχύει

$$f^{-1}(M) \le \frac{1}{M} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Υπόδειξη: Σχεδιάστε το γράφημα και ερμηνεύστε τις σχετικές ποσότητες ως εμβαδά.

Λύση: Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται $M f^{-1}(M) \le \int_0^1 f(x)\, dx$ της οποίας το αριστερό μέλος είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία

$$(0, 0),\ (f^{-1}(M), 0),\ (f^{-1}(M), M),\ (0, M),$$

ορθογώνιο το οποίο βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ ακριβώς επειδή η f είναι φθίνουσα. Άρα το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $\le$ από το εμβαδό κάτω από την καμπύλη, που είναι το ολοκλήρωμα.

Πρ. 5 Η $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι φθίνουσα, και υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $R > 0$ να ισχύει $\int_0^R f(x)\, dx \le M$. Δείξτε ότι

(1) ισχύει $x f(x) \le M$,

(2) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\, dx$ και επίσης $\int_R^{2R} f(x)\, dx \to 0$, για $R \to \infty$, και

(3) $x f(x) \to 0$ για $x \to \infty$.

Λύση: (1): Το $xf(x)$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία

$$(0,0),\ (x,0),\ (x,f(x)),\ (0,f(x)),$$

το οποίο βρίσκεται εξ ολοκλήρου κάτω από την καμπύλη επειδή η f είναι φθίνουσα (κάντε το σχήμα), άρα

$$xf(x) \le \int_0^x f(t)\,dt \le M.$$

(2): Η συνάρτηση $F(R) = \int_0^R f(t)\,dt$ είναι αύξουσα, αφού $f \ge 0$, και φραγμένη από M, άρα το όριο $L = \lim_{R\to\infty} F(R)$ υπάρχει. Αλλά

$$\int_R^{2R} f(x)\,dx = F(2R) - F(R),$$

και τα όριο των δύο προσθετέων δεξιά είναι και τα δύο ίσα με L, άρα το όριο της ποσότητας αριστερά είναι 0.

(3): Το εμβαδό του ορθογωνίου με κορυφές

$$(x/2,0),\ (x,0),\ (x,f(x)),\ (x/2,f(x))$$

ισούται με $xf(x)/2$ και το ορθογώνιο είναι κάτω από την καμπύλη $y=f(x)$ άρα

$$xf(x)/2 \le \int_{x/2}^x f(t)\,dt,$$

και αφού η ποσότητα δεξιά τείνει στο 0 για $x\to\infty$ έπεται ότι $xf(x)\to 0$.

Πρ. 6 Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right) = \mathbb{R}$ και επίσης ότι $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right) = \mathbb{Q}$.

Λύση: Έστω

$$A_n = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right).$$

Για να ανήκει ένας πραγματικός x σε ένα διάστημα $(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n})$ πρέπει και αρκεί $|q-x|<1/n$. Αφού για κάθε πραγματικό x υπάρχει ρητός q που να απέχει από τον x λιγότερο από $1/n$ (ή ό,τι άλλο θέλουμε) έπεται ότι κάθε $x\in\mathbb{R}$ ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα που συμμετέχουν στην ένωση, άρα ανήκει στο A_n. Δείξαμε $A_n=\mathbb{R}$ για κάθε n, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$.

Για το δεύτερο ορίζουμε

$$B_q = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right).$$

Για να ανήκει ο $x\in\mathbb{R}$ στο B_q πρέπει να ανήκει σε όλα τα $\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right)$ (για όλα τα $n\in\mathbb{N}$), πρέπει δηλ. η απόστασή του από το q να είναι μικρότερη του $1/n$ για κάθε n. Αυτό γίνεται μόνο όταν η απόσταση είναι 0, άρα μόνο για $x=q$, οπότε έχουμε δείξει $B_q=\{q\}$, και άρα

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} B_q = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\} = \mathbb{Q}.$$

Πρ. 7 (α) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ και επίσης $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \infty$.

(β) Όπως το (α) αλλά οι f_n να είναι επιπλέον συνεχείς στο $[0,1]$.

Υπόδειξη: Για το (α) δοκιμάστε την ακολουθία $f_n(x) = n^3\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A, που είναι 1 εντός του A και 0 εκτός του A).

Λύση: Ας είναι f_n η ακολουθία συναρτήσεων της υπόδειξης. Τότε

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^3}{n(n+1)} \to \infty.$$

Για σταθερό $x > 0$ και $n \to \infty$ έχουμε ότι για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε $\frac{1}{n} < x$ οπότε θα έχουμε τελικά $f_n(x) = 0$, άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $f_n(x) \to 0$. Το ίδιο ισχύει τετριμμένα για $x = 0$ αφού όλες οι f_n είναι 0 στο 0.

Για το (β) αντικαταστήσετε την $f_n(x)$, της οποίας το γράφημα είναι ένα ορθογώνιο, με την τμηματικά γραμμική συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι το τρίγωνο με βάση τη βάση του ορθογωνίου της f_n και κορυφή το μέσο της άνω πλευράς του ορθογωνίου της f_n. Η νέα συνάρτηση εξακολουθεί να τείνει κατά σημείο στο 0 (αφού, για παράδειγμα, είναι $\le f_n$), έχει ολοκλήρωμα ακριβώς το μισό της f_n και άρα τείνει και πάλι στο άπειρο και είναι συνεχής.

Πρ. 8 Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να υπάρχει η παράγωγος $f_n'(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in (0,1)$ και επίσης η ακολουθία f_n να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια παραγωγίσιμη $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ αλλά να υπάρχει $x \in (0,1)$ για το οποίο να μην ισχύει $f_n'(x) \to f'(x)$. Βρείτε επίσης τέτοιο παράδειγμα για το οποίο να μην ισχύει $f_n'(x) \to f'(x)$ για κανένα $x \in (0,1)$.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις της υπόδειξης και έχουμε προφανώς ότι $f_n(x) \to 0$ ομοιόμορφα στο $(0,1)$ (αλλά και σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$) αφού $|f_n(x) - 0| \le \frac{1}{n} \to 0$. Η οριακή συνάρτηση $f(x) = 0$ είναι φυσικά παντού παραγωγίσιμη και με παράγωγο 0.

Έχουμε $f_n'(x) = \cos(nx)$. Αν επιλέξουμε $x = \frac{\pi}{4} \in (0,1)$ τότε έχουμε ότι για n πολλαπλάσιο του 8 ισχύει $\cos(nx) = 1$ ενώ για n της μορφής $8k+4$ έχουμε $\cos(nx) = -1$, άρα η ακολουθία $f_n'(x)$ δε συγκλίνει καθόλου για $x = \frac{\pi}{4}$.

Στην πραγματικότητα για κανένα $x \in \mathbb{R}$ δεν ισχύει $\cos(nx) \to 0$. Αυτό φαίνεται πολύ εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για το συνημίτονο του διπλασίου τόξου:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

Πράγματι, αν το $\cos(nx)$ είναι πολύ κοντά στο 0 τότε (θέτοντας $\theta = nx$ στον προηγούμενο τύπο) παίρνουμε ότι το $\cos(2nx)$ είναι πολύ κοντά στο -1, πράγμα που δε μπορεί να συμβαίνει αν $\cos(nx) \to 0$.

Πρ. 9 Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των πολυωνύμων

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

με ακέραιους συντελεστές $p_j \in \mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Θα πρέπει να περιγράψετε μια διαδικασία που θα φτιάχνει όλα τα πολυώνυμα αυτά, το ένα μετά το άλλο, και τουλάχιστον μια φορά το καθένα. Έτσι παράγεται μια απαρίθμηση των πολυωνύμων αυτών. Μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσετε την εξής παρατήρηση: για κάθε φυσικό αριθμό N υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος πολυώνυμα που έχουν και βαθμό (υψηλότερη δύναμη) $\le N$ αλλά και όλους τους συντελεστές τους κατ' απόλυτη τιμή $\le N$. Για κάθε πολυώνυμο όπως αυτά που φαίνονται παραπάνω πάρτε $N = \max\{n, |p_0|, |p_1|, \ldots, |p_n|\}$.

Λύση: Περιγράφουμε μια διαδικασία με την οποία θα απαριθμήσουμε (αναφέροντάς τα) όλα τα πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές. Σε κάθε πολυώνυμο $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0$ αντιστοιχούμε το φυσικό αριθμό

$$M(p) = \max\{n, |p_0|, |p_1|, \ldots, |p_n|\}.$$

Πόσα πολυώνυμα με ακεραίους συντελεστές υπάρχουν με δεδομένο $M(p)$, ας πούμε με $M(p) = k$; Η απάντηση είναι ότι υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος (μπορούμε να πούμε και με περισσότερη ακρίβεια πόσα είναι, αλλά αυτό δε μας είναι απαραίτητο γι' αυτό το πρόβλημα). Πράγματι, για να κατασκευάσει κανείς το τυχόν πολυώνυμο p με $M(p) = k$ επιλέγει κατ' αρχήν ποιος θα είναι ο βαθμός του d (έχουμε $k+1$ επιλογές γι' αυτό, τους βαθμούς $0, 1, 2, \ldots, k$), μετά επιλέγει το ποιο θα είναι το p_0 (έχουμε τις επιλογές $-k, -k+1, \ldots, k-1, k$ γι' αυτό), ποιο θα είναι το p_1 (ίδιες επιλογές με το p_0), κλπ, έως ότου επιλέξουμε το p_d (ίδιες επιλογές με τους άλλους συντελεστές). Πολλαπλασιάζοντας τις επί μέρους επιλογές μας παίρνουμε ότι υπάρχουν το πολύ $(k+1)(2k+1)^{k+1}$ τέτοια πολυώνυμα.

Ας ονομάσουμε C_k το σύνολο των πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές που έχουν $M(p) = k$. Μόλις δείξαμε ότι τα σύνολα C_k είναι πεπερασμένα. Είναι επίσης προφανές ότι η ένωση (για όλα τα $k \in \mathbb{N}$) των συνόλων C_k είναι το σύνολο όλων των πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές. Η διαδικασία απαρίθμησης μας είναι η εξής: απαραιθμούμε πρώτα όλα τα στοιχεία του C_0, μετά όλα τα στοιχεία του C_1, του C_2 κλπ. Το σημαντικό εδώ είναι ότι όλα τα C_k είναι πεπερασμένα, άρα όλα τα βήματα τελικά εκτελούνται.